PETAR M. VASIĆ
RADOVAN R. JANIĆ
OLGA MITRINOVIĆ
DOBRILO Đ. TOŠIĆ

# MATEMATIČKI PRIRUČNIK

## ZA TAKMIČENJA SREDNJOŠKOLACA I PRIJEMNE ISPITE NA FAKULTETIMA

**Četvrto dopunjeno izdanje**

**IRO „GRAĐEVINSKA KNJIGA"**
**BEOGRAD, 1983.**

# MATEMATIČKI PRIRUČNIK

## ZA TAKMIČENJA SREDNJOŠKOLACA
## I PRIJEMNE ISPITE NA FAKULTETIMA

Prvo izdanje 1965. Tiraž 2000 primeraka.
Drugo izdanje 1966. Tiraž 4000 primeraka.
Treće izdanje 1974. Tiraž 3000 primeraka.
**Četvrto izdanje 1983. Tiraž 2000 primeraka.**

Za preduzeće odgovara:

**Milan Višnjić, direktor;**

O

**Milica Dodić, odgovorni urednik;**

O

**Snežana Necic, tehnički urednik i naslovna strana;**

O

**Dobrilo Tošić i Radovan R. Janić, korektori;**

Štampa: Štamparija „Bakar“ – Bor

SADRŽAJ

## 1. POGLED NA MATEMATIČKA TAKMIČENJA

**1.1.** U velikom broju zemalja održavaju se svake godine matematička takmičenja (olimpijade) srednjoškolaca. U nekim zemljama ova takmičenja imaju dugu tradiciju. U Francuskoj takmičenja srednjoškolaca zovu se konkursi i priređuju se od 1803. godine. U Sovjetskom Savezu takmičenja iz matematike održavaju se od 1934. godine.

U svim socijalističkim zemljama, po završetku II svetskog rata, ranije ili kasnije, organizovana su matematička takmičenja, dok se u Mađarskoj održavaju još od 1894. godine. U našoj zemlji ona se priređuju od 1957. godine. Ove godine održana je VIII međunarodna matematička olimpijada socijalističkih zemalja. Jugoslavija je učestvovala na poslednje četiri međunarodne olimpijade.

U Sjedinjenim Američkim Državama odavna se održavaju razna lokalna takmičenja, a od 1957. godine Američka matematička asocijacija organizuje masovno nacionalno takmičenje.

**1.2.** Američki matematičar R. Creighton Buck u jednom svom članku [13][1] izneo je prednosti i mogućne negativne posledice takmičenja. Prema njemu ciljevi takmičenja su:

1° Odati zvanično priznanje najboljim učenicima koji slušaju matematiku u raznim školama (u novcu, knjigama, medaljama, diplomama, ...);

2° Otkriti i ohrabriti učenike koji imaju smisla i talenta za matematiku a koji bi inače mogli da ostanu neprimećeni. (Može se takođe desiti da u toku takmičenja izbije na površinu pojedinac koji do tada nije pokazivao nikakve vidnije rezultate.);

3° Dati podsticaj da se matematika što više uči u školama;

4° Usmeriti ka matematici učenike čiji se talent ispoljava u više pravaca, jer dobro planirano i organizovano takmičenje pod rukovodstvom neke autoritativne organizacije može ukazati obdarenim učenicima na neočekivane i široke puteve u studijama matematike;

5° Ukazati školama na ono što se očekuje od boljeg učenika u pogledu zrelosti mišljenja.

S obzirom da takmičenja mogu znatno uticati na život škole, treba obratiti veliku pažnju na izbor pitanja za takmičenja.

R. Creighton Buck navodi sledeće eventualne negativne posledice takmičenja:

1° Pripremajući najsposobnije učenike za takmičenja, nastavnik može u nastavi zanemariti manje sposobne, a to su oni kojima je pomoć najpotrebnija;

2° Pitanje je da li i za najbolje učenike pripremanje takmičenja u rešavanju zadataka predstavlja najbolji način učenja;

---

[1] Videti popis literature na kraju knjige.

3° Takmičenja mogu dovesti do štetnog rivalstva među nastavnicima i takođe među učenicima;

4° Visoke novčane nagrade mogu biti štetne kako za nagrađene tako i za nenagrađene.

**1.3.** Pri organizovanju takmičenja iskrsava pitanje o karakteru zadataka koji se postavljaju takmičarima. Uglavnom, daju se zadaci dvojakog karaktera. Jedna vrsta zadatka postavlja se sa ciljem da se utvrdi znanje takmičara, a druga da se ispitaju njihove sposobnosti i obdarenost za matematički način mišljenja, tj. da se otkriju potencijalni matematički stvaraoci. Tipični zadaci druge vrste zahtevaju nešablonske metode pri rešavanju. Ovakve zadatke mogu da rešavaju takmičari koji imaju istraživačkih sposobnosti. U ovakvim zadacima (problemima) često se krije mogućnost raznih generalizacija na koje se u samoj formulaciji pitanja ne ukazuje, ali ih talentovani takmičar uzima u obzir i rešava.

**1.4.** Poslednjih godina objavljeno je u inostranstvu više članaka o takmičenjima, ali je u njima potpuno zanemareno takmičenje u rešavanju problema koje postavljaju mnogobrojni časopisi namenjeni srednjoškolskoj omladini ili studentima-početnicima. Šta više, nigde se u ovim člancima ne pominje Francuska mada se u njoj održavaju konkursi od 1803. godine. Osim toga, u Francuskoj izdaju se četiri časopisa namenjena uzrastu od 14—19 godina. To su:

*L'Éducation mathématique* (osnovan 1898),

*Journal de mathématiques élémentaires* (osnovan 1877),

*Revue de mathématiques spéciales* (osnovan 1890),

*Annales de Baccalauréat.*

U ovim časopisima objavljen je ogroman broj originalnih i interesantnih problema od kojih su neki vrlo teški. Zainteresovani rešavaju probleme kod kuće i zatim ih šalju redakciji časopisa. Rešenja, tačna i elegantna, objavljuju se i to su prvi koraci ka naučnom radu srednjoškolaca, budućih matematičara i inženjera. Ovo je takođe način za otkrivanje sposobnih i obdarenih za matematiku.

Među problemima datim na olimpijadama često nailazimo na francuske probleme, postavljene u jednom od četiri navedena časopisa, u originalnoj formi ili nešto modifikovane.

U Francuskoj postoji vrlo strogi prijemni ispit iz matematike za stupanje u visoke škole. Taj ispit je posebno visokog nivoa za prijem u škole: *École Polytechnique* i *École Normale Supérieure*. Prijemni ispiti u ovim dvema školama, kako pismeni tako i usmeni, u stvari su olimpijade sa verovatno najtežim problemima koji se daju na svetu. Ovi ispiti pripremaju se od jedne do tri godine. Navedene škole privlače uglavnom sve one mlade Francuze koji su ispoljili smisao za matematiku.

**1.5.** Mada su matematička takmičenja vrlo značajan faktor za podsticanje u bavljenju matematikom, kao i za otkrivanje obdarenih, ne treba im pripisivati apsolutnu vrednost. Kod izrazitih naučnika vrlo je razvijen individualizam, pa i potencijalni naučnik ima u većoj ili manjoj meri ovu osobinu. Psihologija većine takvih ljudi je da ne žele da se bave pitanjima koja im se nameću, kao što su problemi na olimpijadama. Oni više vole da sami izaberu problem koji će rešavati, kao što su, na primer, problemi postavljeni u časopisima ili problemi koje istraživač sam sebi postavlja.

Uostalom, sovjetski matematičar Kolmogorov, koji se mnogo angažuje na pitanju olimpijada za srednjoškolce, kaže:

»Da bi se izbor poziva izvršio potpuno svesno, korisno je učestvovati u radu matematičkih kružoka i lokalnih matematičkih olimpijada. Možda je još korisnije proučiti odgovarajuću literaturu i isprobati svoje snage u rešavanju težih zadataka«.

Pripreme za olimpijade u rešavanju problema vrlo su korisne zato što se time podiže matematička kultura velikog broja srednjoškolaca. Međutim, ako se ove pripreme usmeravaju na uvežbavanje onog što se do sada davalo na olimpijadama, onda to nije najbolji put za otkrivanje talenata i njihovo usmeravanje ka naučnom radu. U stvari, trebalo bi prvo steći teorijsko znanje, pa onda pristupiti njegovim pripremama, ne ograničavajući se pri tome na rešavanje ovog ili onog tipa problema, tj. treba metodično i sistematski uvoditi takmičare u razne oblasti matematike. Sudeći po literaturi kojom raspolažemo, u SSSR-u je najbolje rešeno masovno pripremanje za olimpijade.

Uloga srednjoškolskih nastavnika matematike u pripremanju takmičara je veoma značajna. Ako je redovna nastava u srednjoj školi dobra, uz dopunski rad u matematičkim grupama, može se očekivati da će srednjoškolci, zainteresovani i obdareni za matematiku, uspešno moći da konkurišu na nacionalnim i internacionalnim takmičenjima. Dobar uspeh učenika na olimpijadama istovremeno je i uspeh njihovih nastavnika.

Međutim, pogrešno je dvadesetak dana pred takmičenje, forsiranim vežbama, pripremati učenike i »uvoditi« ih u »teoriju« brojeva, u »teoriju« nejednakosti, itd.

Samo trajna znanja mogu doći do izražaja na takmičenjima, a ona se stiču postepenim i smišljenim sistematskim radom.

Treba posebno istaći da u drugim zemljama matematičari-istraživači daleko više nego kod nas uzimaju učešća u pripremama za takmičenja kao i u njihovom izvođenju. U Poljskoj u vezi sa takmičenjima susreću se imena kao što su: Sierpiński, Kuratowski, Sikorski, Strassewicz, itd; u SSSR-u — Александров, Колмогоров, Кованко, Маркушевич, Гнеденко, Яглом, itd; u SAD — Pólya, Salkind, Bruck, Halmos, itd.

## 2. NEKOLIKO REČI O OVOJ KNJIZI

Prvo poglavlje ovog **Priručnika** sadrži zbirku zadataka za pripremanje srednjoškolaca za takmičenja i prijemne ispite na fakultetima. To su u stvari ponovo redigovani i dopunjeni materijali uzeti iz knjige:

D. S. Mitrinović: *Matematika za prvi stepen nastave na fakultetima u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima*, Beograd 1964.

Drugo poglavlje **Priručnika** daje materijale sa takmičenja u Jugoslaviji, SSSR, SAD, Poljskoj, Kini, Nemačkoj Demokratskoj Republici i Bugarskoj. Ovde su takođe uključene međunarodne olimpijade za srednjoškolce. Materijali koji se ovde daju biće od koristi ne samo budućim učesnicima takmičenja već i onima koji pripremaju učenike za to.

Treće poglavlje **Priručnika** donosi materijale sa prijemnih ispita na fakultetima u Beogradu, Zagrebu i Moskvi. Iznete činjenice jasno ukazuju na potrebu podizanja nivoa znanja koje donose naši učenici iz srednjih škola. Ono je već godinama na veoma niskom nivou.

Četvrto poglavlje sadrži nekoliko priloga koji čine **Priručnik** interesantnim i privlačnim. Na prvom mestu reč je o profesiji matematičara. Najpre se daju odlomci iz jednog Kolmogorovljevog članka kojim se omladina Sovjetskog Saveza upoznaje sa važnošću i lepotom poziva matematičara. Iza toga iznosi se kako se na omladinu Sedinjenih Američkih Država utiče da izabere poziv matematičara u svojstvu nastavnika, naučnog radnika, programera, aktuara ili industrijskog matematičara. Ovi prikazi svakako će uticati da se i jugoslovenska omladina opredeljuje u sve većem broju matematičkim pozivima.

U prilozima **Priručnik** takođe donosi kratke biografije Mihaila Petrovića i Josipa Plemelja.

Ovaj **Priručnik** je podesan i za pripremanje prijemnih ispita na fakultetima. Oni koji žele da studiraju prirodno-matematički ili neki od tehničkih fakulteta pomoću ovog **Priručnika** proveriće svoje znanje i sposobnosti za takve studije.

Sastavljači ovog **Priručnika** su naši poznati i pozvani stručnjaci za ovu vrstu poslova. Oni su aktivno učestvovali u pripremanju učenika i izboru zadataka za takmičenja, u sprovođenju takmičenja ili u obavljanju prijemnih ispita na fakultetima. Može se očekivati da će ovaj **Matematički priručnik** odgovariti svojoj nameni.

Ovo, drugo izdanje, znatno se razlikuje od prvog. Knjiga je obimnija i potpunija jer su dodati novi materijali i izvršena je revizija celog teksta. U prvom izdanju jedan od koautora bio je i dr Zoran R. Pop-Stojanović. Pri izradi drugog izdanja, on nije učestvovao u radu, pa ga je zamenio dr Dragomir Ž. Đoković.

1. avgusta 1966. *D. S. Mitrinović*

## PREDGOVOR TREĆEM IZDANJU

Ovo izdanje je pretrpelo znatne izmene u odnosu na drugo izdanje **Priručnika.** Poglavlje *Zadaci za pripremu takmičenja i prijemnih ispita* ostalo je neizmenjeno. Jedino su *Razni zadaci* iz tog poglavlja znatno dopunjeni i prošireni zadacima koji su zadavani na matematičkim takmičenjima u Poljskoj, SSSR-u, Kini, Nemačkoj Demokratskoj Republici i Bugarskoj. Stoga je izostalo poglavlje o matematičkim takmičenjima u ovim zemljama.

Poglavlje o *saveznom takmičenju i republičkim takmičenjima* u našoj zemlji, kao i *međunarodnim matematičkim olimpijadama* dopunjeno je novim zadacima. Poglavlje *Prijemni ispiti na fakultetima* svedeno je u ovom izdanju **Priručnika** na zadatke sa Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu.

Uprkos tome što je ovo izdanje **Priručnika** po obimu manje od drugog izdanja, novi materijali su doprineli da njegov sadržaj bude aktuelan. U drugom izdanju **Priručnika** jedan od koautora bio je i dr Dragomir Ž. Đoković. Pri izradi ovog izdanja on nije sarađivao, pa ga je zamenio dr Radovan R. Janić.

4. avgusta 1974. *D. S. Mitrinović*

## PREDGOVOR ČETVRTOM IZDANJU

Posle skoro devet godina izlazi novo-četvrto izdanje **Priručnika**. U odnosu na treće izdanje ovde su dopunjena poglavlja o saveznom takmičenju, republičkim takmičenjima, ali zbog ograničenog prostora samo za Socijalističku Republiku Srbiju, kao i međunarodnim matematičkim takmičenjima. Prijemni ispiti na fakultetima svedeni su na tekstove zadataka sa Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, s obzirom da postoji posebna zbirka zadataka sa prijemnih ispita na tehničkim fakultetima.

Interes za **Priručnik** nešto je opao poslednjih godina, kada su praktično ukinuti prijemni ispiti. Međutim, kako su sada prijemni ispiti ponovo uvedeni, nadamo se da će **Priručnik** pomoći kandidatina ne samo u uspešnom pripremanju prijemnih ispita, već će i znatno uticati na podizanje nivoa njihovog znanja.

Za pripremanje matematičkih takmičenja **Priručnik** je stalno aktuelan. S obzirom da su takmičenja sve masovnija, **Priručnik** će svakako doprineti njihovom kvalitetu.

24. aprila 1983.

*Autori*

# ZADACI ZA PRIPREMU TAKMIČENJA I PRIJEMNIH ISPITA

1. ARITMETIKA
2. KOMPLEKSNI BROJEVI
3. IDENTITETI
4. FUNKCIJE
5. JEDNAČINE
6. NEJEDNAKOSTI
7. PROGRESIJE
8. MATEMATIČKA INDUKCIJA
9. KOMBINATORIKA
10. SUMIRANJE
11. GEOMETRIJA
12. ANALITIČKA GEOMETRIJA
13. RAZNI ZADACI

# 1. ARITMETIKA

**1.1.** Dokazati:

1° Ako je zbir dva cela broja paran broj, njihova je razlika takođe paran broj;

2° Ako je zbir dva cela broja neparan broj, njihova je razlika takođe neparan broj;

3° Ako je zbir dva cela broja neparan broj, njihov proizvod je paran broj;

4° Ako je proizvod tri cela broja neparan broj, njihov zbir je takođe neparan broj.

Da li važe obrnuti stavovi?

***Rešenje.*** 1° Neka su $x$, $y$, $n$, $m$ celi brojevi i neka je

(1) $$x+y=2m.$$

Ako bi bilo

(2) $$x-y=2n+1,$$

iz (1) i (2) dobili bismo jednakost $2x=2(m+n)+1$ koja je nemogućna jer ona tvrdi da je paran broj jednak neparnom. Iz ove kontradikcije sleduje da ne važi (2) već jednakost $x-y=2k$ ($k$ ceo broj). Važi i obrnut stav.

Direktan dokaz navedene osobine dat je pomoću jednakosti:

$$x-y=(x+y)-2y=2m-2y=2(m-y),$$

gde $x$, $y$, $m$ imaju spomenuta značenja.

4° Ako su $x$, $y$, $z$, $m$, $n_1$, $n_2$, $n_3$ celi brojevi, iz jednakosti $xyz=2m+1$ sleduje $x=2n_1+1$, $y=2n_2+1$, $z=2n_3+1$, odakle proističe $x+y+z=2(n_1+n_2+n_3+1)+1$, čime je stav dokazan.

Da obrnuto ne važi, dokazuje primer $x=2$, $y=4$, $z=1$.

**1.2.** Neka je $p$ zbir dva prirodna broja $m$ i $n$.

1° Navesti jedan dovoljan uslov, koji nije i potreban, da bi broj $p$ bio deljiv sa 2.

2° Navesti potreban i dovoljan uslov da bi zbir $p$ bio deljiv sa 2.

***Odgovor.*** 1° Brojevi $m$ i $n$ su parni. 2° Brojevi $m$ i $n$ su iste parnosti (ili su oba parna ili oba neparna).

**1.3.** Neka je $n$ prirodan broj.

1° Navesti jedan dovoljan uslov, koji nije i potreban, da bi broj $n$ bio deljiv sa 9.

2° Navesti jedan potreban uslov, koji nije i dovoljan, da bi broj $n$ bio deljiv sa 9.

3° Navesti potreban i dovoljan uslov da bi broj $n$ bio deljiv sa 9.

***Odgovor.*** 1° Sve cifre broja $n$ su devetke. 2. Broj $n$ deljiv je sa 3. 3° Zbir cifara broja $n$ deljiv je sa 9.

**1.4.** Dokazati da se svaki prirodan broj $N$ može predstaviti u obliku

$$3n+r \qquad (n \text{ prirodan broj i } r=0,\ 1,\ 2).$$

*Dokaz.* Pri deljenju broja $N$ sa 3 ostatak deljenja je 0 ili 1 ili 2.

**1.5.** Dokazati da se svaki prirodan broj može predstaviti u obliku

$$4n+r \qquad (n \text{ prirodan broj i } r=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

**1.6.** Dokazati da za prirodne brojeve $a$ i $b$ $(<a)$, $b\nmid a$, postoje prirodni brojevi $q$ i $r$ takvi da je

$$a=bq+r \qquad (0<r<b).$$

Ako je $b|a$, tada je $a=bq$, tj. $r=0$.

**1.7.** Dokazati da se kvadrat svakog neparnog broja $k$ može predstaviti u obliku $8p+1$ ($p$ prirodan broj ili nula). Kakav oblik ima zbir kvadrata dva neparna broja?

*Rešenje.* $k=2n+1 \Rightarrow k^2=4n^2+4n+1 \Leftrightarrow k^2=4n(n+1)+1 \qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots).$

Budući da su $n$ i $n+1$ dva uzastopna cela broja, njihov proizvod je paran broj $\geqslant 0$, tj.

$$n(n+1)=2p \qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ldots).$$

Prema tome, imamo $k^2=8p+1$ $(p=0,\ 1,\ 2,\ldots)$.

**1.8.** Dokazati da je

$$\frac{n^k-n}{2} \qquad (n \text{ i } k \text{ prirodni brojevi veći od } 1)$$

prirodan broj.

**1.9.** Dokazati da je

$$\frac{n}{2}(n^k+1) \qquad (n=1,\ 2,\ldots;\ k=1,\ 2,\ldots)$$

zbir $n$ uzastopnih prirodnih brojeva.

*Rešenje.* Treba dokazati da postoji nenegativan ceo broj $x$ takav da je

(1) $$(x+1)+(x+2)+\cdots+(x+n)=\frac{n}{2}(n^k+1).$$

Jednakost (1) ekvivalentna je sledećoj

$$\frac{n}{2}(x+1+x+n)=\frac{n}{2}(n^k+1) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(n^k-n).$$

Za $k=1$ ili $n=1$ imamo $x=0$. Ako su $n$ i $k$ proizvoljni prirodni brojevi $>1$, uvek je $\frac{1}{2}(n^k-n)$ prirodan broj (videti prethodni zadatak).

**1.10.** Dokazati da je proizvod ma koja četiri uzastopna prirodna broja deljiv sa 24.

**1.11.** Dokazati relaciju $12 \mid (n^4 - n^2)$ ($n$ ceo broj).

**1.12.** Dokazati da je broj $a^{n+4} - a^n$ ($a$ i $n$ prirodni brojevi) deljiv sa 10.

***Rešenje.*** Predstavimo dati broj u obliku $a^n(a^4 - 1)$ i obrazujmo tablicu:

| Poslednja cifra broja $a$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Poslednja cifra broja $a^4$ | 0 | 1 | 6 | 1 | 6 | 5 | 6 | 1 | 6 | 1 |

Ako je $a$ broj čija je poslednja cifra 0, stav je istinit, jer je tada $a^n$ deljivo sa 10.
Ako je $a$ broj čije su krajnje cifre 1, 3, 7, 9, stav je istinit, jer je tada $a^4 - 1$ deljivo sa 10.
Ako je $a$ broj čije su krajnje cifre 2, 4, 6, 8, tada je $a^4 - 1$ deljivo sa 5, dok je $a^n$ deljivo sa 2.
Ako je $a$ broj čija je krajnja cifra 5, tada je $a^n$ deljivo sa 5, dok je $a^4 - 1$ deljivo sa 2.
Prema tome, dokaz je završen.

**1.13.** Dokazati da je zbir kvadrata dva cela broja deljiv sa 7 ako i samo ako je svaki od tih brojeva deljiv sa 7.

***Dokaz.*** Svaki prirodan broj ili nula može se prikazati jednim od izraza

(1) $\quad 7r, \; 7r+1, \; 7r+2, \; 7r+3, \; 7r+4, \; 7r+5, \; 7r+6$ ($r$ prirodan broj ili nula).

Kvadrati ovih brojeva redom su oblika

(2) $\quad 7p, \; 7p+1, \; 7p+4, \; 7p+2, \; 7p+2, \; 7p+4, \; 7p+1$ ($p$ prirodan broj ili nula).

Posmatrajmo uporedo sa (1) drugi proizvoljan prirodan broj ili nulu. Taj se broj može prikazati jednim od izraza

$7s, \; 7s+1, \; 7s+2, \; 7s+3, \; 7s+4, \; 7s+5, \; 7s+6$ ($s$ prirodan broj ili nula).

Kvadrati ovih brojeva respektivno su oblika

(3) $\quad 7q, \; 7q+1, \; 7q+4, \; 7q+2, \; 7q+2, \; 7q+4, \; 7q+1$, ($q$ prirodan broj ili nula).

Ako se formiraju svi zbirovi od dva sabirka od kojih jedan pripada skupu (2), a drugi skupu (3), konstatuje se da je zaista istinit stav koji je trebalo dokazati.

**1.14.** Brojevi 1 331, 1 030 301, 1 003 003 001 su potpuni kubovi.
Brojevi 14 641, 104 060 401, 1 004 006 004 001 su potpuni četvrti stepeni.
Ustanoviti zakon formiranja ovih brojeva, obrazložiti ovu činjenicu i ispitati da li se rezultat može generalisati.

***Uputstvo.*** Primeniti formule:

$$(10^n + 1)^3 = 10^{3n} + 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n + 1;$$
$$(10^n + 1)^4 = 10^{4n} + 4 \cdot 10^{3n} + 6 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1.$$

**1.15.** Ako postoji relacija $(m-p) \mid (mn+pq)$, dokazati da važi

$$(m-p) \mid (mq+np) \quad (m, n, p, q \text{ prirodni brojevi}; \; m \neq p).$$

***Uputstvo.*** Posmatrati identitet $(mn+pq)-(mq+np)=(m-p)(n-q)$.

**1.16.** Ako su $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ takvi prirodni brojevi da je

$$(a\alpha,\quad \beta a+\alpha b,\quad \gamma a+\alpha c+\beta b,\quad \gamma b+\beta c,\quad \gamma c)=p,$$

gde je $p$ prost broj i $(\lambda, \mu, \ldots)$ najveći zajednički delilac brojeva $\lambda, \mu, \ldots,$ tada važi $p \mid a, b, c,$ ili $p \mid \alpha, \beta, \gamma.$

Generalisati.

**1.17.** Da li se prirodan broj $n$ može tako odrediti da broj $7^n-1$ bude deljiv sa 8 i 3?

*Rešenje.* $7^n-1=(6+1)^n-1=6^n+\binom{n}{1}6^{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-1}\cdot 6;$

$$7^n-1=(8-1)^n-1=8^n-\binom{n}{1}8^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\cdot 8+(-1)^n-1.$$

Da bi važile obe relacije $8 \mid (7^n-1)$, $3 \mid (7^n-1)$ potreban i dovoljan uslov je $(-1)^n-1=0$, odakle sleduje da je $n$ paran broj.

**1.18.** Ako su $n$ i $k$ $(<n)$ prirodni brojevi, dokazati da je $\binom{n}{k}$ deljivo sa $n$ ako je $n$ prost broj.

**1.19.** Ako je $n$ $(>1)$ prirodan broj, dokazati da u nizu prirodnih brojeva

$$n!+2,\quad n!+3,\quad \ldots,\quad n!+n$$

nema nijednog prostog broja.

*Dokaz.* Broj $n!+n$ deljiv je sa $n$.

Broj $n!+(n-1)$ deljiv je sa $n-1$.

.
.
.

Broj $n!+2$ deljiv je sa 2.

Tako, na primer, između brojeva $100!+2$ i $100!+100$ nema ni jednog prostog broja

**1.20.** Ako se iz skupa $E_{2n}=\{1, 2, \ldots, 2n\}$ od $2n$ prirodnih brojeva proizvoljno izabere $n+1$ brojeva, dokazati da postoje bar dva od njih od kojih je jedan deljiv drugim.

*Rešenje.* Označimo sa $E_{n+1}$ skup od $n+1$ proizvoljnih brojeva koji pripadaju skupu $E_{2n}$. Svaki parni od tih brojeva može se izraziti u obliku $2^s\lambda_s$, gde je $s$ prirodan broj, a $\lambda_s$ neparan broj. Neka je $\overline{E}_{n+1}$ skup brojeva $\lambda_s$ i svih neparnih brojeva skupa $E_{n+1}$. Skup $\overline{E}_{n+1}$ sadrži $n+1$ elemenata (svi su oni neparni brojevi i manji od $2n$).

Budući da skup $E_{2n}$ ima tačno $n$ neparnih brojeva, znači da su bar dva broja u skupu $\overline{E}_{n+1}$ među sobom jednaki.

Odavde sleduje da u skupu $E_{n+1}$ ima bar dva broja oblika $2^s\lambda$ i $2^r\lambda$ ($s$ i $r$ prirodni brojevi ili nula, dok je $\lambda$ neparan broj). Ako je $s>r$, količnik je $2^{s-r}$ (prirodan broj).

**1.21.** Dokazati da je broj $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$, gde je $a$ ceo broj, potpun kvadrat.

*Rezultat.* $a^4+6a^3+11a^2+6a+1=(a^2+3a+1)^2.$

**1.22.** Dokazati jednakosti:

1° $abc=(a,\ b,\ c)\ [(a,\ b),\ (b,\ c),\ (c,\ a)]\ [a,\ b,\ c]$,

2° $abc=(a,\ b,\ c)\ [ab,\ bc,\ ca]$,

3° $abc=(ab,\ bc,\ ca)\ [a,\ b,\ c]$,

gde su $a$, $b$, $c$ prirodni brojevi, $(a, b, \ldots)$ najveći zajednički delilac i $[a, b, \ldots]$ najmanji zajednički sadržalac brojeva $a, b, \ldots$

Generalisati.

*Uputstvo.* Ako se stavi

$$(a,\ b,\ c)=d,\quad (b,\ c)=pd,\quad (c,a)=qd,\quad (a,\ b)=rd,$$

gde su $p, q, r, d$ prirodni brojevi za koje je $(p, q)=(q, r)=(r, p)=1$, tada je $a=a_1\,qrd$, $b=b_1\,rpd$, $c=c_1\,pqd$, gde su $a_1$, $b_1$, $c_1$ po dva i dva relativno prosti brojevi. Na osnovu dobijenih jednakosti neposredno se mogu formirati desne strane jednakosti 1°, 2°, 3°, odnosno iste dokazati.

**1.23.** Ako su $a,\ b(>0)$, $c,\ d(>0)$, $p,\ q(>0)$ celi brojevi koji ispunjavaju uslov $\frac{a}{b}>\frac{p}{q}>\frac{c}{d}$, dokazati da se mogu odrediti dva cela pozitivna broja $m$ i $n$ takva da je

$$\frac{p}{q}=\frac{ma+nc}{mb+nd}.$$

**1.24.** Data je jednačina $ax+by=c$, gde su $a$, $b$, $c$ $(abc\neq 0)$ celi brojevi.

Ako brojevi $a$ i $b$ imaju zajednički faktor, koji nije faktor broja, $c$, dokazati da ova jednačina nema celobrojnih rešenja $(x,\ y)$.

**1.25.** 1° Da li neodređena jednačina

$$yz+zx+xy=10$$

ima rešenja u skupu pozitivnih celih brojeva?

2° Odrediti $a$ tako da jednačina

$$yz+zx+xy=a$$

ima rešenja u navedenom skupu.

*Uputstvo.* 1° Bar jedan od proizvoda $yz$, $zx$, $xy$ mora biti $>\frac{10}{3}$. Neka je to $yz$, dakle $yz>\frac{10}{3}$.

Osim toga, svaki od navedenih proizvoda mora biti manji od 10. Dakle,

$$\frac{10}{3}<yz<10.$$

Dalje se, bez teškoće, zaključuje da jednačina, pod navedenim ograničenjima nema rešenja.

**1.26.** Odrediti sva celobrojna rešenja $(x,\ y)$ Diofantove jednačine

(1) $$x^2-xy+y^2=x+y.$$

***Rešenje.*** Posmatrajmo jednačinu (1) u obliku

$$x^2-(y+1)x+y^2-y=0, \quad \text{tj.} \quad x=\frac{y+1\pm\sqrt{-3y^2+6y+1}}{2}.$$

Da bi $x$ bilo realno, potrebno je i dovoljno da bude

$$-3y^2+6y+1>0, \quad \text{tj.} \quad \frac{3-2\sqrt{3}}{3}<y<\frac{3+2\sqrt{3}}{3}.$$

Dakle, u obzir dolaze sledeće vrednosti: $y=0$ ili $y=1$ ili $y=2$.

Za $y=0$ dobijamo $x=0$ ili $x=1$.

Za $y=1$ dobijamo $x=0$ ili $x=2$.

Za $y=2$ imamo $x=1$ ili $x=2$.

Prema tome, sva rešenja date Diofantove jednačine (1) su:

$$(0,\ 0),\quad (0,\ 1),\quad (1,\ 0),\quad (1,\ 2),\quad (2,\ 1),\quad (2,\ 2).$$

**1.27.** Neka su $a$, $b$, $c$, $d$ racionalni brojevi, $x$ iracionalan broj. Koji uslov treba da ispunjavaju $a$, $b$, $c$, $d$ da bi broj $(ax+b)/(cx+d)$ bio racionalan?

***Rešenje.*** Neka je

$$\frac{ax+b}{cx+d}=p \quad (p \text{ racionalan broj}), \text{ tj. } (a-pc)x+(b-pd)=0.$$

Kako su po pretpostavci brojevi $a, b, c, d, p$ racionalni i $x$ iracionalan, iz poslednje jednakosti sleduje

$$a=pc, \qquad b=pd,$$

ili

(1) $$ad=bc,$$

jer bi inače bilo $x=-\dfrac{b-pd}{a-pc}$, tj. iracionalan broj jednak racionalnom.

Prema tome, uslov (1) je potreban da bi broj $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ bio racionalan. Dokažimo sada da je uslov (1) i dovoljan. Zaista ako je on ispunjen, tada je

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax+b}{cx+\dfrac{bc}{a}}=\frac{a(ax+b)}{c(ax+b)}=\frac{a}{c} \qquad (a\neq 0).$$

Skraćivanje sa $ax+b$ je dozvoljeno, jer bi za $ax+b=0$ izišlo da je $x$ racionalno. Ako je $a=0$, iz (1) sleduje da mora biti $b=0$ ili $c=0$, pa količnik $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ svakako mora biti racionalan.

**1.28.** Odrediti sve proste brojeve $p$ za koje je $p^2+14$ prost broj.

***Rešenje.*** Neka je $S$ skup svih prostih brojeva sa navedenom osobinom. Neposredno se proverava da $2 \notin S$. Stoga $p \in S \Rightarrow p=2m+1$ ($m$ nula ili prirodan broj) i odatle,

$$p^2+14=4m(m+1)+3\cdot 5.$$

Da broj $p^2+14$ ne bi bio $>15$ i deljiv sa 3, te zato složen, mora biti

$$m=3n+1 \qquad (n \text{ nula ili prirodan broj}),$$

i stoga je

$$p=2(3n+1)+1=3(2n+1).$$

Dakle, $p$ je deljivo sa 3, pa može jedino biti $p=3$. Neposredno se proverava da $3\in S$. Prema tome, jedino broj 3 ispunjava postavljeni uslov.

**1.29.** Za koje je racionalne vrednosti $x$ funkcija $\log_2(x^2-4x-1)$ ceo broj?

*Rešenje.* Iz uslova $\log_2(x^2-4x-1)=n$, gde je $n$ ceo broj, izlazi $x=2\pm\sqrt{5+2^n}$. Da bi $x$ bilo racionalno, izraz pod korenom treba da bude kvadrat celog broja, tj. $5+2^n=k^2$. Ako je $n>0$, broj $5+2^n$ je neparan pa i broj $k$ mora takođe da bude neparan, tj. $k=2m-1$ ($m$ prirodan broj). Prema tome imamo $(2m-1)^2=5+2^n$, tj. $m(m-1)=2^{n-2}+1$. Broj $m(m-1)$ je paran broj dok je na desnoj strani neparan broj, osim za $n=2$. Za ovu vrednost $n$ dobijamo $x_1=5$ i $x_2=-1$. Ako je $n<0$, mora da važi jednakost $2^{-n}(k^2-5)=1$. Kako je na levoj strani paran broj a na desnoj neparan, ovaj slučaj ne dolazi u obzir. Za $n=0$, imamo $x^2-4x-1=0$; međutim ova jednačina nema racionalnih korena. Prema tome, jedina rešenja su $x=-1$ i $x=5$.

**1.30.** Dokazati da neodređena jednačina

(1) $$2x^2-5y^2=7$$

nema celobrojnih rešenja.

*Rešenje.* Predstavimo jednačinu (1) u obliku $2x^2=5y^2+7$. Pošto je $2x^2$ paran broj, tada $y^2$, tj. $y$, mora biti neparno. Prema tome, ako umesto $y$ uvedemo $2m+1$, jednačina (1) postaje

(2) $$x^2=10m(m+1)+6.$$

Na osnovu ovog zaključujemo da $x$ mora biti parno. Ako u (2) stavimo $x=2n$, dobijamo

$$2n^2=5m(m+1)+3.$$

Ova jednakost nema smisla jer je na levoj strani paran broj, a na desnoj neparan. Prema tome, jednačina (1) nema celobrojnih rešenja.

**1.31.** Za koje vrednosti $x$ i $y$ važi jednakost

$$[\sin(x-y)+1][2\cos(2x-y)+1]=6?$$

**1.32.** Data je kvadratna jednačina

$$x^2-x+b=0 \quad (b \text{ realan broj}),$$

čiji su koreni $\alpha$ i $\beta$ racionalni brojevi.

Dokazati da su koreni jednačine

(1) $$x^2+\alpha x-\beta=0$$

takođe racionalni brojevi.

*Rešenje.* Koreni jednačine (1) su racionalni ako je diskriminanta $D=\alpha^2+4\beta$ kvadrat jednog racionalnog broja. Pošto je $\alpha+\beta=1$, tj. $\beta=1-\alpha$, dobija se

$$D=\alpha^2+4(1-\alpha)=(\alpha-2)^2,$$

što je i trebalo dokazati.

**1.33.** Neka su $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ celi brojevi. Ako su $ae+b$ i $ce+d$ deljivi sa $k$ ($k$ ceo broj $\neq 0$), dokazati da je i $ad-bc$ deljivo sa $k$.

*Rešenje.* Iz datog uslova izlaze jednakosti

$$ae+b=kn \quad \text{i} \quad ce+d=km \qquad (m \text{ i } n \text{ celi brojevi}).$$

Ako se prva jednakost pomnoži sa $c$ i druga sa $a$, pa se od druge oduzme prva, dobija se

$$ad-bc=k(ma-nc),$$

što znači da je i $ad-bc$ deljivo sa $k$, pošto je $ma-nc$ ceo broj.

**1.34.** Odrediti četvorocifren broj $\overline{abcd}$ koji ispunjava uslove

(1) $$\overline{cda}-\overline{abc}=297,$$

(2) $$a+b+c=23,$$

gde su $a, b, c, d \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ i $a \neq 0$.

*Rešenje.* Iz uslova (1) izlazi

$$100c+10d+a-(100a+10b+c)=297,$$

odnosno

(3) $$99(c-a)+10(d-b)=297.$$

Pošto su $a, b, c, d \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ i $a \neq 0$, jednačina (3) zadovoljena je samo za

(4) $$c-a=3,$$

(5) $$d-b=0.$$

Ako se od jednačine (2) oduzme jednačina (4), nalazi se

$$2a+b=20.$$

Kako je $c=a+3$, dobija se $a<6$ (jer je $0<c<9$); iz $b=20-2a$ izlazi da je $a>6$. Ova dva uslova ispunjena su samo za $a=6$, tako da je $c=9$, $b=8$, $d=8$.

Prema tome traženi broj je 6898.

**1.35.** Da li postoje prirodni brojevi $a, b, c, d$ koji zadovoljavaju jednačine:

$$a\cdot b\cdot c\cdot d-a=\underbrace{11\ldots1}_{m \text{ puta}}, \qquad a\cdot b\cdot c\cdot d-b=\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ puta}},$$

$$a\cdot b\cdot c\cdot d-c=\underbrace{11\ldots1}_{p \text{ puta}}, \qquad a\cdot b\cdot c\cdot d-d=\underbrace{11\ldots1}_{q \text{ puta}}?$$

*Rešenje.* Predstavimo prvu jednačinu u obliku

$$a(b\cdot c\cdot d-1)=\underbrace{11\ldots1}_{m \text{ puta}}.$$

Na desnoj strani je neparan broj, tako da oba činioca na levoj strani moraju biti neparni. Prema tome, $a$ mora biti neparan broj dok bar jedan od brojeva $b$, $c$, $d$ mora biti paran. Ako se isto rezonovanje primeni na ostale jednakosti, dolazi se do nemogućnih uslova, odakle se zaključuje da dati sistem nema celobrojnih rešenja, izuzimajući slučaj $m=n=p=q=0$.

**1.36.** Odrediti dva trocifrena broja, čiji se proizvod sastoji samo od dvojki.

*Rešenje.* Svi proizvodi trocifrenih brojeva nalaze se između 10 000 i 1 000 000. U tom intervalu nalaze se samo dva broja, koji imaju sve dvojke. To su 22 222 i 222 222. Rastavimo ove brojeve na proste činioce. Dobija se

1° $22\,222=2\cdot41\cdot271$, odakle izlazi da ne postoje dva trocifrena broja čiji je proizvod 22 222.

2° $222\,222=2\cdot3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37$. Ovde imamo ukupno sedam kombinacija:

$$(7\cdot37)\cdot(2\cdot3\cdot11\cdot13)=259\cdot858,$$
$$(11\cdot37)\cdot(2\cdot3\cdot7\cdot13)=407\cdot546,$$
$$(13\cdot37)\cdot(2\cdot3\cdot7\cdot11)=481\cdot462,$$
$$(2\cdot7\cdot37)\cdot(3\cdot11\cdot13)=518\cdot429,$$
$$(3\cdot7\cdot37)\cdot(2\cdot11\cdot13)=777\cdot286,$$
$$(2\cdot11\cdot37)\cdot(3\cdot7\cdot13)=814\cdot273,$$
$$(2\cdot13\cdot37)\cdot(3\cdot7\cdot11)=962\cdot231.$$

**1.37.** Da li zbir kvadrata dva uzastopna prirodna broja može biti jednak zbiru četvrtih stepena druga dva uzastopna prirodna broja?

*Uputstvo.* Jednakost $m^2+(m+1)^2=n^4+(n+1)^4$ možemo napisati u obliku $m(m+1)=n(n+1)\times\times[n(n+1)+2]$. Ostaje da se dokaže da proizvod dva uzastopna prirodna broja ne može biti jednak proizvodu dva prirodna broja koji se razlikuju za 2.

**1.38.** Dokazati da se pri deljenju prostog broja sa 30 dobija ostatak koji je takođe prost broj.

*Rešenje.* Neka se pri deljenju prostog broja $p$ sa 30 dobija broj $a$ i ostatak $b$, tj. $p=30a+b$ $(b<30)$. Pošto bilo koji složeni broj manji od 30 ima sa brojem 30 zajednički činitelj, izlazi da je broj $p$ složen, što je protivurečno sa pretpostavkom da je broj $p$ prost. Prema tome, $b$ je prost broj.

**1.39.** Ako broj napisan u binarnom sistemu glasi

$$1\underbrace{00\ldots0}_{33\text{ nule}}1\underbrace{00\ldots0}_{89\text{ nula}}1\underbrace{0100\ldots0}_{13\text{ nula}} \quad \text{(ukupno ima 136 nula)},$$

dokazati da je napisan u dekadnom sistemu multipl broja 136.

**1.40.** Dokazati da ne postoje celi brojevi $x, y, z, n$ koji zadovoljavaju relacije

$$z<\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}, \qquad x^n+y^n=z^n.$$

**1.41.** Odrediti najmanji ceo pozitivan broj čija je polovina potpun kvadrat, trećina potpun kub i petina potpuni peti stepen.

*Rezultat.* $20\,155\,392\,000\,000=2^{15}\,3^{10}\,5^6$.

**1.42.** Između svake dve cifre broja 14 641 postavljeno je $k$ nula. Dokazati da e dobijeni broj potpun kvadrat.

*Rešenje.* Ako su između svake dve cifre datog broja umetne $k$ nula, dobija se broj $N=10^{4k+4}+4\cdot10^{3k+3}+6\cdot10^{2k+2}+4\cdot10^{k+1}+1$, koji se može napisati u obliku $N=(10^{k+1}+1)^4$.

**1.43.** Dokazati da zbir i razlika dva nesvodljiva razlomka, čiji su imenioci različiti, ne mogu biti celi brojevi.

*Rešenje.* Neka su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ dva nesvodljiva razlomka i pretpostavimo da je $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=N$, gde je $N$ ceo broj. Ako ovu jednakost pomnožimo sa $b$, dobijamo $a+\frac{c}{d}b=Nb$, odakle izlazi da se $d$ mora sadržati u $b$. Ako zatim istu jednakost pomnožimo sa $d$, izlazi uslov da se $b$ mora sadržati u $d$. Prema tome, $b$ i $d$ moraju biti isti, što protivureči uslovu zadataka. Dokaz je isti i u slučaju razlike dva nesvodljiva razlomka.

# 2. KOMPLEKSNI BROJEVI

**2.1.** Dokazati da su tačke $A$ i $B$, čiji su afiksi $a-b$ i $b$ ($a$, $b$ kompleksni brojevi), simetrične u odnosu na tačku $C$ čiji je afiks $a/2$.

**2.2.** Koji je međusobni položaj tačaka $a=p+qi$ i $b=q+pi$ ($p$ i $q$ realni brojevi)? Koji kompleksni broj odgovara sredini $S$ duži koja spaja ove dve tačke?

***Rezultat.*** Tačke $a$ i $b$ leže simetrično u odnosu na simetralu prvog kvadranta. Tački $S$ odgovara broj $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{p+q}{2}+i\dfrac{p+q}{2}$.

**2.3.** Odrediti realni i imaginarni deo, modul i argument kompleksnog broja

$$z=(1+i)^n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

***Rezultat.*** $\operatorname{Re} z=2^{n/2}\cos\dfrac{n\pi}{4}$, $\operatorname{Im} z=2^{n/2}\sin\dfrac{n\pi}{4}$, $|z|=2^{n/2}$, $\arg z=\dfrac{n\pi}{4}$ $(n=1,2,\ldots)$.

**2.4.** Proveriti identitet

$$(1+\cos a+i\sin a)^n=2^n\cos^n\frac{a}{2}\left(\cos\frac{na}{2}+\ i\sin\frac{na}{2}\right).$$

**2.5.** Moduli kompleksnih brojeva $a$, $b$, $c$, $d$ čine geometrijsku progresiju, a njihovi argumenti aritmetičku.

Ako je $a=\sqrt{2}$, $d=4i$, izraziti te brojeve u trigonometrijskom obliku.

***Rezultat.*** Postoje tri rešenja:

1° $b=2\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6}$, $\qquad c=2\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}$;

2° $b=2\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{6}$, $\qquad c=2\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{10\pi}{6}$;

3° $b=2\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\qquad c=2\sqrt{2}\operatorname{cis}(-\pi)$.

**2.6.** Ako je $k$ prirodan broj, dokazati da je $(1+i)^{4k}$ realan, a $(1+i)^{4k+2}$ čisto imaginaran broj.

***Rešenje.*** Kako je

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4},$$

primenom Moivreove formule dobijamo

$$(1+i)^{4k}=\left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^{4k}=2^{2k}\operatorname{cis}k\pi=(-1)^k 2^{2k},$$

$$(1+i)^{4k+2}=(-1)^k 2^{2k}\left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^2=(-1)^k 2^{2k+1}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}=(-1)^k 2^{2k+1}i.$$

**2.7.** Ako je $f(n)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ ($n$ prirodan broj), dokazati da je

$$f(n+4)+f(n)=0.$$

**2.8.** Ako su $z_1$, $z_2$, $z_3$ afiksi tri uzastopna temena jednog paralelograma, odrediti afiks četvrtog temena.

*Rešenje.* Neka je $z_4$ četvrto teme i $z'$ presek dijagonala paralelograma. Tada je

$$z'=\frac{z_1+z_3}{2}=\frac{z_2+z_4}{2} \Leftrightarrow z_4=z_1+z_3-z_2.$$

**2.9.** Dokazati da su tačke $z_1$, $z_2$, $z_3$ kolinearne ako i samo ako je

(1) $$(z_3-z_1)/(z_2-z_1)=a \quad (a \text{ realno}).$$

*Rešenje.* Pretpostavimo prvo da su tačke $z_1$, $z_2$, $z_3$ kolinearne. Tada je:

$(y_3-y_1):(x_3-x_1)=(y_2-y_1):(x_2-x_1)$, odnosno $i(y_3-y_1):(x_3-x_1)=i(y_2-y_1):(x_2-x_1)$.

Prema jednoj osobini proporcije je

$$((x_3-x_1)+i(y_3-y_1))/(x_3-x_1)=((x_2-x_1)+i(y_2-y_1))/(x_2-x_1),$$

odakle je

$$(z_3-z_1)/(z_2-z_1)=(x_3-x_1)/(x_2-x_1)=a \quad (a \text{ realno}),$$

što je trebalo dokazati.

Neka je, obratno, ispunjen uslov (1). Tada je

$x_3-x_1=a(x_2-x_1)$ i $y_3-y_1=a(y_2-y_1)$, odakle je $(y_3-y_1):(x_3-x_1)=(y_2-y_1):(x_2-x_1)$

što je trebalo dokazati.

**2.10.** Izraziti $x^2+iy^2$ kao funkciju od $z$ i $\bar{z}$, gde je $x=\operatorname{Re} z$ i $y=\operatorname{Im} z$.

**2.11.** Odrediti geometrijsko mesto tačaka $z$ za koje je $\operatorname{Re}(z+iz)=0$.

*Rezultat.* Prava $y=x$.

**2.12.** Odrediti skup takvih tačaka $z$ da $z$, $\frac{1}{z}$, $1-z$ imaju jednake module.

*Rešenje.* Iz jednakosti $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|$ sleduje

(1) $$|z|=1.$$

Iz jednakosti $|z|=|1-z|$ i (1) izlazi

(2) $$|1-z|=1.$$

Iz (1) i (2) sleduje $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}$, odakle se, s obzirom na (1), dobijaju rešenja

$$z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Traženi skup je $\{z_1, z_2\}$.

**2.13.** U kompleksnoj ravni date su tačke $A(a)$ i $B(b)$. Ako je tačka $P(z)$ ma koje rešenje jednačine

$$(z-a)^4+(z-b)^4=0,$$

dokazati da je $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|$.

Generalisati.

**2.14.** Ako je $|a|=1$ ili $|b|=1$, dokazati da je $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=1.$

Koji izuzetak treba učiniti ako je $|a|=|b|=1$?

**2.15.** Dokazati identitet $|a+b|^2+|a-b|^2=4|a|^2$ $(|a|=|b|)$.

**2.16.** Dokazati $|a|^2+|b|^2+|c|^2+|a+b+c|^2=|a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2$.

**2.17.** Dokazati identitet $|1-a\bar{b}|^2-|a-b|^2=(1+|ab|)^2-(|a|+|b|)^2$.

*Uputstvo.* Koristiti osobinu $|a|^2=a\bar{a}$.

**2.18.** Ako su $a$ i $b$ realni brojevi, dokazati da je

$$\sqrt{a+ib}=\pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\,\mathrm{sgn}\,b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right\},$$

gde je $\mathrm{sgn}\,b=1$ $(b\geqslant 0)$ i $\mathrm{sgn}\,b=-1$ $(b<0)$.

Ispred svih korena na desnoj strani treba uzeti znak $+$.

Primeri. $\sqrt{3+4i}=\pm(2+i)$, $\sqrt{-7+24i}=\pm(3+4i)$, $\sqrt{i}=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

**2.19.** Dokazati da kubni koren iz $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ ima sledeće tri vrednosti:

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)i,$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)i,$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

**2.20.** Dokazati da $\sqrt[4]{i}$ ima sledeće četiri vrednosti:

$$\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right),\quad \pm\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).$$

**2.21.** Dati su kompleksni brojevi

$$a=1+i\lambda,\quad b=1-i/\lambda\qquad (\lambda \text{ realan broj } \neq 0).$$

Za koje je vrednosti $\lambda$ tačka $a$ bliža koordinatnom početku nego tačka $b$?

**2.22.** Ako su $z_1$ i $z_3$ dva naspramna temena jednog kvadrata u kompleksnoj ravni, odrediti položaje ostalih temena.

***Rezultat.*** $\frac{1}{2}(z_1+z_3)\pm i\,\frac{1}{2}(z_1-z_3)$.

**2.23.** Ako je $|z_1|=1$, $|z_2|=1$ i $z_1 z_2 \neq -1$, dokazati da je $(z_1+z_2)/(1+z_1 z_2)$ realan broj.

**2.24.** Ako su $A$ i $B$ slike kompleksnih brojeva $a$ i $b$, ako je $(a+b)^2/(ab)$ realan broj, tačke $O$ (koordinatni početak), $A$ i $B$ su kolinearne, ili su temena jednog ravnokrakog trougla. Dokazati.

**2.25.** Ako tačke $A, B, C, D$, čiji su afiksi $z_1, z_2, z_3, z_4$, leže na jediničnom krugu i ako je

(1) $$z_1+z_2+z_3+z_4=0,$$

dokazati da je $ABCD$ pravougaonik.

***Rešenje.*** Kvadrati dužina strana četvorougla $ABCD$ su:

$$|z_1-z_2|^2, \quad |z_2-z_3|^2, \quad |z_3-z_4|^2, \quad |z_4-z_1|^2.$$

Kvadrati dužina dijagonala su: $|z_1-z_3|^2$ i $|z_2-z_4|^2$.

Kako se tačke $A$ i $B$ nalaze na krugu $|z|=1$, biće

$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2).$$

Na analogni način nalazi se

$$|z_2-z_3|^2=2-(z_2\overline{z_3}+\overline{z_2}z_3), \qquad |z_3-z_4|^2=2-(z_3\overline{z_4}+\overline{z_3}z_4),$$

$$|z_4-z_1|^2=2-(z_4\overline{z_1}+\overline{z_4}z_1), \qquad |z_1-z_3|^2=2-(z_1\overline{z_3}+\overline{z_1}z_3).$$

$$|z_2-z_4|^2=2-(z_2\overline{z_4}+\overline{z_2}z_4).$$

Iz uslova (1) izlazi

$$z_1+z_2=-(z_3+z_4), \quad \overline{z_1}+\overline{z_2}=-(\overline{z_3}+\overline{z_4}),$$

odakle se posle množenja, dobija

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_3\overline{z_4}+\overline{z_3}z_4,$$

Prema tome je $|z_1-z_2|=|z_3-z_4|$.

Na isti način se utvrđuje da je

$$|z_2-z_3|=|z_4-z_1| \quad \text{i} \quad |z_1-z_3|=|z_2-z_4|.$$

Posmatrani četvorougao ima jednake po dve i dve naspramne strane i jednake dijagonale To je pravougaonik, kao što je i trebalo dokazati.

***Primedba.*** Da li je bilo potrebno dokazivati da su dijagonale jednake?

**2.26.** Ako su $A, B, C, D$ četiri tačke koje leže u jednoj ravni, dokazati da

(1) $$AD\cdot BC \leqslant BD\cdot CA+CD\cdot AB.$$

***Dokaz.*** Neka su afiksi tačaka $A, B, C, D$ u kompleksnoj ravni redom označeni sa $z_1, z_2, z_3, z_4$ Kako je

$$(z_1-z_4)(z_2-z_3)+(z_2-z_4)(z_3-z_1)+(z_3-z_4)(z_1-z_2)=0,$$

dobija se

$$|(z_1-z_4)(z_2-z_3)|=|(z_2-z_4)(z_3-z_1)+(z_3-z_4)(z_1-z_2)|,$$

odakle izlazi

$$|z_1-z_4|\,|z_2-z_3|<|z_2-z_4|\,|z_3-z_1|+|z_3-z_4|\,|z_1-z_2|.$$

To je upravo nejednakost (1) koju je trebalo dokazati.

**2.27.** Dokazati da jednačina

(1) $z\bar{z}+\bar{A}z+A\bar{z}+B=0$ ($B$ realna i $A$ kompleksna konstanta takva da je $|A|^2>B$) određuje krug u kompleksnoj ravni.

*Uputstvo.* U jednačini kruga $x^2+y^2+px+qy+s=0$ smeniti $x=(z+\bar{z})/2$, $y=(z-\bar{z})/(2i)$.

Može se tako isto poći od jednačine

(2) $|z-\alpha|=r \Leftrightarrow |z-\alpha|^2=r^2 \Leftrightarrow (z-\alpha)(\overline{z-\alpha})=r^2 \Leftrightarrow z\bar{z}-\alpha\bar{z}-\bar{\alpha}z+\alpha\bar{\alpha}-r^2=0.$

Ako se sada uporede jednačine (1) i (2), zaključuje se da su centar i poluprečnik kruga (1) određeni formulama:

$$\alpha=-A,\quad r^2=\bar{\alpha}\alpha-B=|\alpha|^2-B.$$

Krug je realan ako je $|\alpha|^2>B$. Za $|\alpha|^2=B$ krug se svodi na tačku $z=\alpha$. Ako je $|\alpha|^2<B$, jednačina (1) ne definiše ništa.

**2.28.** Ispitati da li je

$$|z-p|=2|z| \Leftrightarrow \left|z+\frac{1}{3}p\right|=\frac{4}{9}|p|^2.$$

**2.29.** Sumirati

$$A=1+\binom{n}{1}\cos\theta+\binom{n}{2}\cos 2\theta+\cdots+\binom{n}{n}\cos n\theta,$$

$$B=\binom{n}{1}\sin\theta+\binom{n}{2}\sin 2\theta+\cdots+\binom{n}{n}\sin n\theta.$$

*Rezultat.* $A=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}$, $B=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}$.

**2.30.** U kojoj oblasti leže tačke $z=x+iy$ ako je jednovremeno

$$|z-i|\leqslant 1 \quad \text{i} \quad |z-1|\leqslant 1?$$

*Rezultat.* Zajednička oblast krugova $x^2+(y-1)^2<1$ i $(x-1)^2+y^2<1$.

**2.31.** Dokazati nejednakost

$$(1+uv)(1+\bar{u}\bar{v})\leqslant(1+u\bar{u})(1+v\bar{v}),$$

gde su $u$ i $v$ kompleksni brojevi.

*Dokaz.* Ova nejednakost ekvivalentna je nejednakosti

$$uv+\bar{u}\bar{v}<u\bar{u}+v\bar{v} \Leftrightarrow (u-\bar{v})(\bar{u}-v)>0 \Leftrightarrow |u-\bar{v}|^2>0.$$

Ovim je dokaz završen.

**2.32.** Izvesti formulu

$$\operatorname{tg} nx=\frac{C_n^1 \operatorname{tg} x-C_n^3 \operatorname{tg}^3 x+C_n^5 \operatorname{tg}^5 x-\cdots}{1-C_n^2 \operatorname{tg}^2 x+C_n^4 \operatorname{tg}^4 \alpha-\cdots} \qquad \left(n \text{ prirodan broj; } C_n^k=\binom{n}{k}\right).$$

***Rešenje.*** Polazeći od Moivreove formule

$$(\cos x+i \sin x)^n=\cos nx+i \sin nx,$$

dobija se:

$$\cos nx=\cos^n x-\binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x+\binom{n}{4} \cos^{n-4} x \sin^4 x-\cdots,$$

$$\sin nx=\binom{n}{1} \cos^{n-1} x \sin x-\binom{n}{3} \cos^{n-3} x \sin^3 x+\binom{n}{5} \cos^{n-5} x \sin^5 x-\cdots$$

Iz poslednjih jednakosti sleduje

$$\operatorname{tg} nx=\frac{C_n^1 \operatorname{tg} x-C_n^3 \operatorname{tg}^3 x+C_n^5 \operatorname{tg}^5 x-\cdots}{1-C_n^2 \operatorname{tg}^2 x+C_n^4 \operatorname{tg}^5 x-\cdots}.$$

Tako je, na primer,

$$\operatorname{tg} 5x=\frac{5 \operatorname{tg} x-10 \operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^5 x}{1-10 \operatorname{tg}^2 x+5 \operatorname{tg}^4 x}, \quad \operatorname{tg} 6x=\frac{6 \operatorname{tg} x-20 \operatorname{tg}^3 x+6 \operatorname{tg}^5 x}{1-15 \operatorname{tg}^2 x+15 \operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^6 x}.$$

**2.33.** Dokazati da se svi kompleksni brojevi modula 1 mogu predstaviti u obliku $\frac{x+i}{x-i}$ ($x$ realno).

**2.34.** Dati geometrijsku interpretaciju nejednakosti

(1) $$|2z|<|1+z^2|.$$

***Rešenje.*** Ova nejednakost ekvivalentna je sledećoj nejednakosti

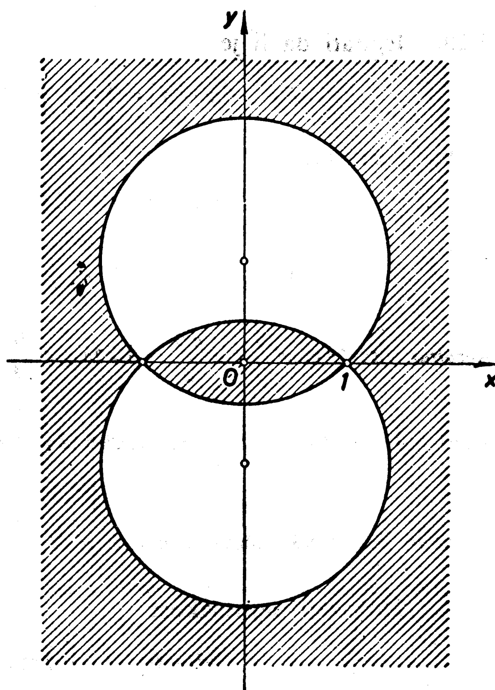
$$2z \cdot 2\bar{z}<(1+z^2)(1+\bar{z}^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(x^2+y^2)<1+(x^2+y^2)^2+2(x^2-y^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2+y^2-1)^2-4y^2>0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2+y^2-1-2y)(x^2+y^2-1+2y)>0$$

$$\Leftrightarrow \quad [x^2+(y-1)^2-2][x^2+(y+1)^2-2]>0.$$




Šrafirana oblast bez graničnih tačaka je skup tačaka $z$, tj. $(x, y)$, za koje važi nejednakost (1).

# 3. IDENTITETI

**3.1.** Dokazati $\log_b a \cdot \log_a b = 1$ $(a, b > 0 \wedge a, b \neq 1)$.
Generalisati.

**3.2.** Dokazati $a^{\log b} = b^{\log a}$ $(a, b > 0)$.

**3.3.** Da li se $a, b, c, m$ mogu odrediti tako da važi identitet

$$x^4 + 2x^3 - 23x^2 + 12x + m = (x^2 + ax + c)(x^2 + bx + c)?$$

**3.4.** Odrediti $a, b, c, d$ tako da za svako $x$ važi

$$a(x+1)x(x-1) + bx(x-1) + c(x-1) + d = x^3.$$

**3.5.** Ako je $u_n = (b-c)^n + (c-a)^n + (a-b)^n$, dokazati jednakost

$$u_{n+3} + (bc + ca + ab - a^2 - b^2 - c^2)u_{n+1} - (b-c)(c-a)(a-b)\,u_n = 0.$$

**3.6.** Ako je

$$A_m = \frac{a^m + a^{-m}}{2}, \quad B_m = \frac{a^m - a^{-m}}{2},$$

proveriti identitete:

$$A_m^2 - B_m^2 = 1, \quad A_{-m} = A_m, \quad B_{-m} = -B_m,$$

$$A_{m+n} = A_m A_n + B_m B_n, \quad B_{m+n} = A_m B_n + A_n B_m.$$

Takođe izraziti $A_{m-n}$ i $B_{m-n}$ pomoću $A_m, A_n, B_m, B_n$.

**3.7.** Proveriti identitet $(x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)^2$.

**3.8.** Ako je $n$ prirodan broj, dokazati jednakost

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right).$$

***Rešenje.*** **Izraz koji se nalazi na levoj strani date relacije može se predstaviti u obliku:**

$$\frac{1}{2n}\left[\frac{(2n-1)+1}{1\cdot(2n-1)} + \frac{(2n-3)+3}{3\cdot(2n-3)} + \cdots + \frac{1+(2n-1)}{(2n-1)\cdot 1}\right]$$

$$= \frac{1}{2n}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n-3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{1}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right].$$

**3.9.** Proveriti jednakost

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right)=\sum_{\substack{l,\,k=0\\ l+k\leq 2n}}^{n} a_l b_k x^{l+k}.$$

**3.10.** Proveriti formulu $\sum_{k=1}^{2n}[k/2]=n^2$, gde je $[k/2]$ najveći ceo broj koji ne premašuje $k/2$.

**3.11.** Ako je $a_1a_2=b_1b_2=c_1c_2$, dokazati jednakost

$$(a_1+b_2)(b_1+c_2)(c_1+a_2)=(a_2+b_1)(b_2+c_1)(c_2+a_1).$$

**3.12.** Dokazati identitet

(1) $$2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-6)(4n-2)=(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n).$$

*Rešenje.* Neka je $F(n)$ izraz na levoj i $G(n)$ izraz na desnoj strani jednakosti (1). Tada je

$$F(n)=2^n(2n-1)!!\Leftrightarrow n!F(n)=(2n)!!(2n-1)!!\Leftrightarrow n!F(n)=(2n)!,$$
$$G(n)=(n+1)(n+2)\cdots(2n)\Leftrightarrow n!G(n)=(2n)!$$

Prema tome $F(n)=G(n)$.

**3.13.** Ako je

(1) $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}\qquad (a,\ b,\ c\neq 0 \text{ i } a+b+c\neq 0),$$

dokazati da je

(2) $$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}\qquad (n \text{ neparan broj}).$$

*Rešenje.* Iz (1) izlazi

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{c}\Leftrightarrow\frac{a+b}{ab}=-\frac{a+b}{c(a+b+c)},$$

tj.

$$(a+b)\big(c(a+b+c)+ab\big)=0\Leftrightarrow(a+b)(a+c)(b+c)=0.$$

Ovo znači da je ili $a=-b$ ili $a=-c$ ili $b=-c$.
Na osnovu ovog zaključujemo da je, za $n$ neparno, ili $a^n=-b^n$ ili $a^n=-c^n$ ili $b^n=-c^n$.
Prema tome, ako važi jednakost (1), tada takođe važi jednakost (2).

**3.14.** Faktorisati $A=a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$.

*Rešenje.* $A=(a^4-b^4)(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)+b^4(b^2-c^2)$
$=(a^2-b^2)\big((a^2+b^2)(b^2-c^2)-(b^2-c^2)(b^2+c^2)\big)$
$=(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)$.

**3.15.** Razložiti $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$ na linearne faktore.

*Rešenje.* $A=bc(b+c)+a\big(c(c-a)-b(a+b)\big)$
$=bc(b+c)+a\big((c-b)(c+b)-a(c+b)\big)$
$=(a+b)(b+c)(c-a)$.

**3.16.** Dokazati identitet:

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c \quad (a\neq b\neq c\neq a).$$

***Dokaz.*** Ako levu stranu datog identiteta obeležimo sa $L$, imamo

$$L=\frac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

odnosno

$$L=\frac{(a^3-b^3)(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)+b^3(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

tj,

$$L=\frac{(a-b)((a^2+ab+b^2)(c-b)-(c^3-b^3))}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(a-b)(c-b)(a^2-c^2+b(a-c))}{(a-b)(c-b)(a-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(c-b)(a-c)(a+b+c)}{(a-b)(c-b)(a-c)}.$$

Dakle, $L=a+b+c$, što je trebalo dokazati.

**3.17.** Dokazati $\left(\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}+\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}\right)^2=4\max(a, b) \quad (a, b\geqslant 0).$

***Rešenje.*** Izraz $\left(\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}+\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}\right)^2$ ima smisla u skupu nenegativnih brojeva, jer je

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab} \qquad (a, b>0).$$

Za $a, b>0$ imamo

$$\left(\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}+\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}\right)^2=2a+2b+2\sqrt{(a+b)^2-4ab}=2a+2b-2\sqrt{(a-b)^2}$$

$$=2a+2b-2|a-b|.$$

Pošto je

$$|a-b|=a-b \quad (a>b) \quad \text{i} \quad |a-b|=b-a \quad (a<b),$$

dobija se

$$\left(\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}+\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}\right)^2=\begin{cases}4a & (a>b)\\ 4b & (a<b)\end{cases}=4\max(a, b).$$

**3.18.** Ako je $n\equiv 1 \pmod 5$ i $n\equiv 2 \pmod 5$ ($n$ prirodan broj), dokazati da je

$$\cos\frac{2n-1}{5}\pi+\cos\frac{4n}{5}\pi=0.$$

***Uputstvo.*** Staviti: 1° $n-1=5p$; 2° $n-2=5p$ ($p$ prirodan broj ili nula).

**3.19.** Dokazati

1° $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}$; 2° $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$.

***Rešenje.*** 1° $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\cos\frac{\pi}{5}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}}=\cos\frac{\pi}{5}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{2\pi}{5}}=\frac{\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{2\pi}{5}}=\frac{1}{4}.$

**3.20.** Dokazati formule:

(1) $$\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2};$$

(2) $$\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}.$$

***Rešenje.*** Kako je $\frac{7}{8}\pi=\pi-\frac{1}{8}\pi$; $\frac{5}{8}\pi=\pi-\frac{3}{8}\pi$, izraz na levoj strani u (1) postaje

(3) $$2\left(\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}\right).$$

Budući da je $\frac{3}{8}\pi=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{8}\pi$, dobija se $\sin\frac{3\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}$, pa (3) postaje

$$2\left(\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}\right)=2\left[\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2-2\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}\right]=2-\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}.$$

**3.21.** Ako prirodan broj $n$ nije multipl od 7, dokazati da je:

(1) $$E=\cos\frac{n\pi}{7}+\cos\frac{3n\pi}{7}+\cos\frac{5n\pi}{7}=\begin{cases}1/2 & (n \text{ neparan broj}),\\ -1/2 & (n \text{ paran broj}).\end{cases}$$

Posebno posmatrati slučaj kada je $n=7k$ ($k$ ceo broj)?

***Rešenje.***

$$\sin\frac{2n\pi}{7}=2\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{n\pi}{7},$$

$$\sin\frac{4n\pi}{7}-\sin\frac{2n\pi}{7}=2\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{3n\pi}{7},$$

$$\sin\frac{6n\pi}{7}-\sin\frac{4n\pi}{7}=2\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{5n\pi}{7}.$$

Odavde izlazi

$$E=\left(\sin\frac{6n\pi}{7}\right)\Big/\left(2\sin\frac{n\pi}{7}\right).$$

Ako je $n\neq 7k$ ($k$ ceo broj), tada je

$$E=-\frac{1}{2}\cos n\pi=-\frac{1}{2}(-1)^n,$$

odakle se dobija (1).

Za $n=7k$ izraz $E$ postaje

$$\cos k\pi+\cos 3k\pi+\cos 5k\pi=3\cdot(-1)^k,$$

tj.

$$E=\begin{cases}-3 & (n=7k,\ k \text{ neparan broj}),\\ 3 & (n=7k,\ k \text{ paran broj}).\end{cases}$$

**3.22.** Proveriti identitet

$$\frac{1}{\sin(y+z)}\left[\sin y+\frac{\sin x\sin z}{\sin(x+y+z)}\right]=\frac{1}{\sin(x+z)}\left[\sin x+\frac{\sin y\sin z}{\sin(x+y+z)}\right].$$

**3.23.** Proveriti identitet $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)+\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)=\frac{2\sin a}{\cos a+\cos b}$.

**3.24.** Dokazati $\sqrt{1+2\sin x\cos x}=|\sin x+\cos x|$.

**3.25.** Dokazati identitet $\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=\operatorname{tg} 3x$.

*Uputstvo.* Brojilac i imenilac prikazati u obliku:

$$(\sin x+\sin 5x)+\sin 3x, \qquad (\cos x+\cos 5x)+\cos 3x.$$

Za koje vrednosti $x$ ovaj identitet gubi smisao?

**3.26.** Ako je $f(a)=(\operatorname{tg} a+\sin a)^{1/2}+(\operatorname{tg} a-\sin a)^{1/2}$, dokazati formulu

$$f(a)=2(\operatorname{tg} a)^{1/2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right) \qquad \left(0<a<\frac{\pi}{2}\right).$$

Odrediti $f(a)$ u sledećim slučajevima:

1° $\pi/2<a<\pi$; 2° $\pi<a<3\pi/2$; 3° $3\pi/2<a<2\pi$.

**3.27.** Dokazati formule:

(1) $$\sin a=-\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 2a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 2a}$$

(2) $$\cos a=-\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 2a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 2a}$$

$$\left(\frac{5\pi}{4}<a<\frac{7\pi}{4}\right).$$

*Rešenje.* Primenimo identitete:

$$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha \Rightarrow \sqrt{1+\cos 2\alpha}=\sqrt{2}\,|\cos\alpha|;$$

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha \Rightarrow \sqrt{1-\cos 2\alpha}=\sqrt{2}\,|\sin\alpha|.$$

Odavde izlazi

$$\sqrt{1+\sin 2a}=\sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2a\right)}=\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\right|=\sqrt{2}\left|\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

$$\sqrt{1-\sin 2a}=\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-2a\right)}=\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Kako je $\frac{5\pi}{4}<a<\frac{7\pi}{4}$, biće $\pi<a-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}$, te je

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\right|=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left|\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\right|+\left|\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\right|\right\}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{-\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=\sin a.$$

Na sličan način dokazuje se formula (2).

**3.28.** Proveriti identitete:

$$\sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b) = 0,$$

$$\sin(b-c)\sin(a-d) + \sin(c-a)\sin(b-d) + \sin(a-b)\sin(c-d) = 0.$$

*Uputstvo.* Upotrebiti identitet: $2\sin p \sin q = \cos(p-q) - \cos(p+q)$.

**3.29.** Proveriti identitete:

$$\sin 3a + \cos a = (\sin a + \cos a)(\sin 2a + \cos 2a);$$

$$\cos 3a + \sin a = (\cos a - \sin a)(\cos 2a + \sin 2a);$$

$$\sin 3a - \cos a = (\cos a - \sin a)(\sin 2a - \cos 2a);$$

$$\cos 3a - \sin a = (\cos a + \sin a)(\cos 2a - \sin 2a).$$

**3.30.** Proverite identitete:

$$\frac{\cos a - \sin a + 1}{\cos a + \sin a - 1} = \operatorname{cotg}\frac{a}{2} \qquad \frac{\sin(n+p)a + \cos na}{\cos(n+p)a + \sin na} = \sec pa + \operatorname{tg} pa.$$

**3.31.** Proveriti identitet $\dfrac{\cos 3t}{\cos t} - \dfrac{\cos 6t}{\cos 2t} = 2(\cos 2t - \cos 4t)$.

Da li ovaj identitet važi za svako $t$?

**3.32.** Dokazati $\left(\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\right)^3 + \left(\dfrac{\cos 3\theta}{\cos\theta}\right)^3 = 4\cos 6\theta + 24\cos 2\theta$.

Za koje vrednosti $\theta$ ovaj identitet ne važi?
Odrediti sva rešenja jednačine $4\cos 6\theta + 24\cos 2\theta = 0$.

**3.33.** Ako je $n$ nula ili prirodan broj, dokazati

$$\prod_{\nu=0}^{n} \cos 2^{\nu} a = \frac{\sin 2^{n+1} a}{2^{n+1}\sin a} \qquad (a \neq k\pi;\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

---

**JEDNO TAKMIČENJE U MATEMATICI U XIII VEKU**

Leonardo Fibonači, italijanski matematičar, učestvovao je na matematičkom takmičenju (turniru) 1225. godine u gradu Pizi. Takmičenje je održano u prisustvu nemačkog cara Fridriha II, koji je specijalno zbog ovog došao u Pizu.

Pored ostalih bio je i zadatak: Odrediti racionalan razlomak koji je potpun kvadrat (tj. može se napisati u obliku kvadrata drugog racionalnog razlomka), a koji ostaje potpun kvadrat i kada se smanji za 5 i kada se poveća za 5.

Fibonači ga je brzo rešio (ne zna se kako!) i dobio $\dfrac{1681}{144}$, tj. $\left(\dfrac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\dfrac{31}{12}\right)^2$ i $\left(\dfrac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\dfrac{49}{12}\right)^2$

U matematici je poznat tzv. Fibonačijev niz brojeva: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, .... (svaki član, uzimajući prvi, dobija se sabiranjem dva predhodna).

# 4. FUNKCIJE

**4.1.** Odrediti funkciju $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a, b, c$ konstante) za koju je

$$f(0)=1, \quad f(2)=-3, \quad f(-2)=3.$$

**4.2.** Da li postoje takve vrednosti $a, b, c$ da bi bio ispunjen uslov $F(F(x))=x$, ako je $F(x)=(ax+b)/(x+c)$?

**4.3.** Korišćenjem simbola apsolutne vrednosti, predstaviti funkciju

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x<0), \\ x & (x>0) \end{cases}$$

pomoću jednog izraza.

*Rezultat.* $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$.

**4.4.** Bez znaka apsolutne vrednosti predstaviti funkciju

$$|x-1|+\frac{|x-2|-|x|}{|2x-1|}.$$

**4.5.** Ako je $f(x)=ax^2+bx+1$, odrediti $f(x+1)-f(x)$ i za slučaj kada je $f(x+1)-f(x)=x$ naći $a$ i $b$.

**4.6.** Ako je $f(x+a)=x^2+x+2$, odrediti:

$$f(x-a), \quad f(ax), \quad f(f(x)+f(-2x)), \quad f\big(a(af(ax))\big).$$

**4.7.** Ako je $f(x+1)=(x^2-x+1)/(x^2+x-1)$, odrediti:

$$f(x-1), \quad f(1/x), \quad f\big(f(1/x)/f(x^2)\big).$$

**4.8.** Ako je $f(x)=\dfrac{x}{a^x-1}+\dfrac{x}{2}$, dokazati da je

$$f(x)=f(-x), \qquad 4f(2x)f(x)=4f(x)^2+x^2.$$

**4.9.** Ako je $f(\operatorname{tg}(t/2))=\cos t$, odrediti $f(\cos t)$.

*Rešenje.* Kako je

$$f(\operatorname{tg}(t/2))=\cos t=\frac{1-\operatorname{tg}^2(t/2)}{1+\operatorname{tg}^2(t/2)},$$

dobija se

$$f(u)=(1-u^2)/(1+u^2),$$

odakle je

$$f(\cos t)=\frac{1-\cos^2 t}{1+\cos^2 t}=\frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}.$$

**4.10.** Odrediti $f\left(\frac{t^{1/2}-t^{-1/2}}{2}\right)$ ako je $f(x)=\frac{(x+1/x)^{1/2}+x^{1/2}}{(x+1/x)^{1/2}-x^{1/2}}$.

**4.11.** Ako je

$$f(x)=(a^x-a^{-x})/(a^x+a^{-x}), \qquad g(x)=2/(a^x+a^{-x}) \qquad (a>0),$$

dokazati da je

$$f(x+y)=[f(x)+f(y)]/[1+f(x)f(y)],$$
$$g(x+y)=g(x)g(y)/[1+f(x)f(y)].$$

**4.12.** Da li su funkcije $ax$, $a\sin bx$ ($a$, $b$ konstante) rešenja funkcionalne jednačine

$$f(x+y)f(x-y)=f(x)^2-f(y)^2?$$

**4.13.** Odrediti funkciju $F_5(x)$ ako je

$$F_k(x)=x\,F_{k-1}(x)-x^2 F_{k-2}(x) \qquad (k=3,\ 4,\ 5,\ \ldots),$$

gde je

$$F_1(x)=x, \qquad F_2(x)=x^2-1.$$

**4.14.** Obrazovati funkciju $F_6(x)$ ako je

$$F_k(x)=F_{k-1}(F_{k-2}(x)) \qquad (k=3,\ 4,\ 5,\ \ldots),$$

gde je $F_1(x)=1/x$, $F_2(x)=x$.

**4.15.** Ako je $f(x)=x^3$, $g(x)=3^x$, odrediti $f(g(x))$ i $g(f(x))$.

**4.16.** Odrediti vrednost funkcije

$$f(x)=\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}} \quad \text{za} \quad x=\frac{2am}{b(1+m^2)}.$$

*Rešenje.* Neka je $a\neq 0$ i $b\neq 0$. Kada je ili $a=0$ ili $b=0$ ili $a=0$ i $b=0$, tada ne postoji $f(x)$. Kako je

$$a+bx=\frac{a(1+m)^2}{1+m^2}, \qquad a-bx=\frac{a(1-m)^2}{1+m^2},$$

dobija se

$$f\left(\frac{2am}{b(1+m^2)}\right)=\frac{\sqrt{a(1+m)^2}+\sqrt{a(1-m)^2}}{\sqrt{a(1+m)^2}-\sqrt{a(1-m)^2}}=\frac{|1+m|+|1-m|}{|1+m|-|1-m|}.$$

Prema tome, tražena vrednost je

$$f\left(\frac{2am}{b(1+m^2)}\right)=\frac{1}{m} \qquad (|m|<1),$$
$$=m \qquad (-\infty<m<-1 \vee 1<m<+\infty).$$

**4.17.** Grafički predstaviti $y=|x+3|+|2x+1|$ i $y=|x+6|$ i odrediti koordinate preseka.

**4.18.** Nacrtati grafik funkcije $f$ definisane sa $f(x)=\dfrac{|x+1|-|x-1|}{2}$.

**4.19.** Nacrtati grafike funkcija $\sqrt{x+1}+|1-\sqrt{x+1}|$, $x\sqrt{|x|}$, $|x|\sqrt{x}$.

**4.20.** Dokazati jednakost

$$f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2 \qquad (1\leqslant x\leqslant 2)$$

i uprostiti $f(x)$ ako je $x\geqslant 2$.
Grafički prikazati rezultat.

***Rešenje.*** Iz jednakosti

$$f(x)^2=\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)^2=2x+2\sqrt{(x-2)^2}=2x+2\,|x-2|$$

sleduje

$$f(x)^2=4 \qquad (1<x<2),$$
$$=4\,(x-1) \qquad (x>2).$$

Kako je $f(x)>0$, dobija se

$$f(x)=2 \qquad (1<x<2),$$
$$=2\sqrt{x-1} \qquad (x>2).$$

**4.21.** Nacrtati grafik funkcije

$$y=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+24-10\sqrt{x-1}}\,.$$

***Uputstvo.*** Data funkcija može se predstaviti u obliku

$$y=\sqrt{x-1}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-5)^2} \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{x-1}+|\sqrt{x-1}-5|.$$

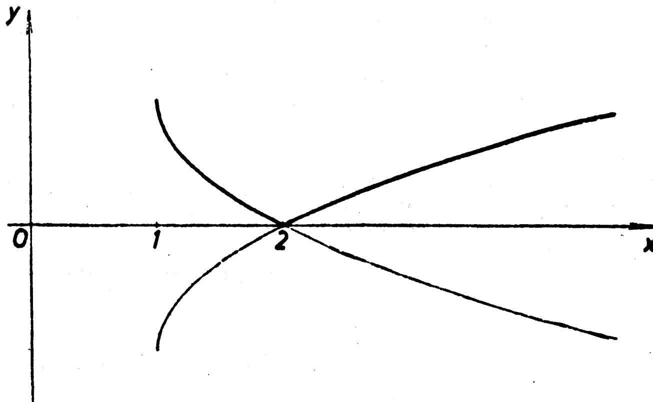
Ova funkcija je definisana za $x>1$.

**4.22.** Odrediti definicionu oblast funkcije $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ i nacrtati njen grafik.

***Rešenje.*** Datu funkciju možemo transformisati na sledeći način:

$$y=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=|\sqrt{x-1}-1|,$$

odakle se vidi da je funkcija definisana za $x>1$.



Grafik date funkcije čine delovi parabola $y=1-\sqrt{x-1}$ za $1<x<2$ i $y=\sqrt{x-1}-1$ za $x>2$ (na slici deblje izvučeno).

**4.23.** Grafički predstaviti funkcije:

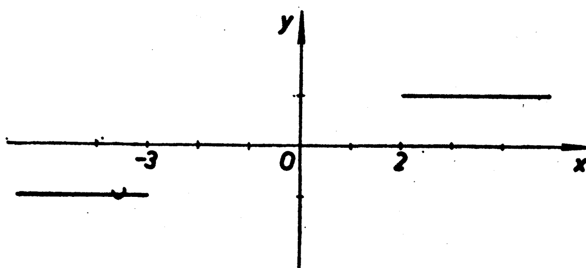
1° $\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}$; 2° $\frac{x}{|x|}\sqrt{\frac{x^2-9}{|x^2-9|}}$; 3° $\frac{x}{|x|}\sqrt{\frac{x^2+x-6}{|x^2+x-6|}}$.

*Rešenje.* 3° Funkcija

$$f(x)=\frac{x}{|x|}\sqrt{\frac{x^2+x-6}{|x^2+x-6|}}$$

definisana je za $x^2+x-6>0 \Rightarrow x\in\{(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)\}$. Prema tome, u definicionom području je

$$f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}-1 & (-\infty<x<-3),\\ 1 & (2<x<+\infty).\end{cases}$$




**4.24.** Nacrtati geometrijsko mesto tačke $(x(t), y(t))$, gde je

1° $x=|1+t|$, $y=|1-t|$; 2° $x=|t|$, $y=t+1$ $(-\infty<t<+\infty)$.

*Rešenje.* 1° Umesto $x=|1+t|$, $y=|1-t|$ može se napisati

(a) $x=-1-t$, $y=1-t$, za $-\infty<t<-1$;

(b) $x=1+t$, $y=1-t$, za $-1<t<+1$;

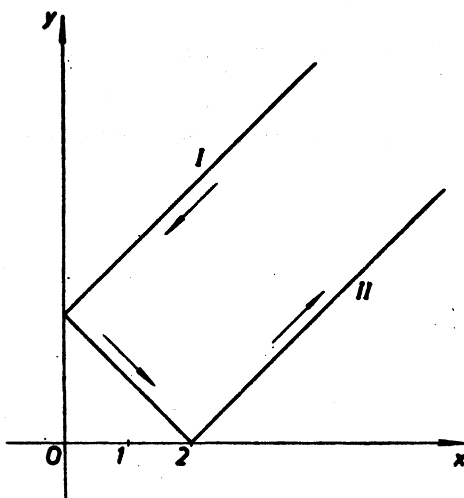
(c) $x=1+t$, $y=t-1$, za $+1<t<+\infty$.

Relacije (a) definišu deo prave $x-y+2=0$ koji je nacrtan na slici (poluprava I).

Relacije (b) definišu odsečak prave $x+y-2=0$ od tačke (0,2) do tačke (2,0).

Relacije (c) definišu deo prave $x-y-2=0$ koji je nacrtan na slici (poluprava II).

Kada $t$ varira od $-\infty$ do $+\infty$, tačka $(x, y)$ polazeći po polupravoj I iz beskrajnosti, opisuje nacrtanu konturu u smislu protivnom kretanju kazaljke na satu.




**4.25.** Nacrtati:

1° $|x+y-1|-|x|=1$; 2° $y=|x|+|x-1|-|x-2|+|x-4|$;

3° $|x|+|y|-|x-1|=x$.

**4.26.** Odrediti $a$, $b$, $c$, $d$ tako da važi

$$y=f(x)=(ax+b)/(cx+d) \Rightarrow x=f(y).$$

*Rezultat.* 1° $a=-d$; 2° $a=d$, $c=b=0$.

**4.27.** Koji uslov treba da ispunjavaju realne konstante $a$, $b$, $c$, $d$ da bi homografička funkcija

$$\frac{ax+b}{cx+d} \qquad (ad-bc\neq 0)$$

bila rastuća odnosno opadajuća?

*Odgovor.* Ako je $ad-bc>0$, funkcija je rastuća; ako je $ad-bc<0$, ona je opadajuća.

**4.28.** Neka su $x$, $y$, $z$ tri realne promenljive vezane jednakostima

(1) $$x=\frac{ay+b}{cy+d}, \quad y=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc\neq 0).$$

Odrediti $a$, $b$, $c$, $d$ tako da (1) $\Rightarrow z=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Da li $x=\dfrac{3y-7}{7y+5}$ ima navedenu osobinu?

**4.29.** Ispitati da li su funkcije

$$1^\circ \quad f(x)=3^x+3^{-x}; \qquad 2^\circ \quad f(x)=\log\frac{2+x}{2-x}, \qquad 3^\circ \quad f(x)=3x-4$$

parne, ili neparne, ili ni jedno ni drugo.

*Rezultat.* 1° parna; 2° neparna; 3° ni parna ni neparna.

**4.30.** Da li su funkcije

$$|a+x|+|a-x|, \quad |x+a|-|x-a|, \quad \{|x+a|-|x-a|\}/(2x)$$

parne ili neparne, ili nisu ni jedno ni drugo?

**4.31.** Ako je $f(x)$ funkcija definisana za svako $x$, dokazati da se ona može predstaviti kao zbir od jedne parne i jedne neparne funkcije.

*Uputstvo.* Primeniti identitet $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.

*Primedba.* Navesti neke funkcije za koje ova osobina ne važi.

Da li važi navedeni stav ako je funkcija $f(x)$ definisana na intervalu $(-a, +a)$?

**4.32.** Da li je mogućno odrediti $a$ tako da funkcija

$$\frac{5x-1}{x^2+x}+a\frac{5x+1}{x^2-x}$$

bude parna ili neparna?

**4.33.** Odrediti osnovni period i amplitudu funkcije $y=\alpha\cos px+\beta\sin px$.

***Rešenje.*** Stavimo $\alpha=a\sin\theta$, $\beta=a\cos\theta$. Tada je

$$y=a(\sin\theta\cos px+\cos\theta\sin px)\Leftrightarrow y=a\sin(px+\theta),$$

pri čemu je $a=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Amplituda je $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ i period $\dfrac{2\pi}{|p|}$.

**4.34.** Odrediti osnovni period funkcija

$$\operatorname{tg}\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right),\quad \sin\frac{4}{3}\theta,\quad \cos\theta-\cos 3\theta.$$

**4.35.** Odrediti osnovni period funkcija:

$$\cos^4 x+\sin^4 x;\qquad \cos^6 x+\sin^6 x.$$

***Uputstvo.*** Izraziti date funkcije kao linearne kompozicije izraza oblika $\sin px$, $\cos px$. Ove funkcije imaju oblike:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x,\quad \frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x.$$

**4.36.** Bez upotrebe izvoda dokazati da je

$$\max(\sin x+2\sin(x+a))=\sqrt{5+4\cos a}.$$

**4.37.** Bez upotrebe izvoda odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$$y=x/(a+bx^2).$$

Nacrtati grafik ove funkcije za slučaj kada je $ab>0$.

**4.38.** Bez upotrebe izvoda odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$$f(x)=1/(\sin ax\cos ax)\qquad (a \text{ realno}).$$

Nacrtati grafik funkcije $f(x)$.
Odrediti realan broj $b$ tako da jednačina $f(x)=b$ nema realnih rešenja.

**4.39.** Odrediti minimum funkcije $y=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$.

***Rešenje.*** Iz

$$y^2=x^2+x+1+x^2-x+1+2\sqrt{(x^2+1)^2-x^2}\Leftrightarrow y^2=2x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}$$

sleduje $\min y=2$ za $x=0$.

**4.40.** Bez upotrebe izvoda odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$$a\cos^2 x+2b\sin x\cos x+c\sin^2 x\qquad (a, b, c \text{ realne konstante}).$$

***Uputstvo.*** Svesti funkciju na oblik $A\cos(\alpha x+\beta)+B$, gde su $\alpha, \beta, A, B$ funkcije od $a, b, c$ koje treba odrediti.

Generalisati.

**4.41.** Odrediti minimum funkcije $y=\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu (x-a_\nu)^2$ $(p_\nu>0)$.

***Rešenje.*** Predstavimo datu funkciju u obliku

$$x^2 \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu - 2x \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu p_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 p_\nu - y = 0.$$

Da bi $x$ koje je određeno ovim kvadratnim trinomom bilo realno, potrebno je i dovoljno da diskriminanta bude nenegativna, tj.

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu p_\nu\right)^2 - \left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 p_\nu\right) + y \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu > 0. \tag{1}$$

S obzirom da je $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu > 0$, najmanja vrednost $y$ za koju važi (1) je

$$y_{\min} = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu a_\nu^2 - \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu a_\nu\right)^2}{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu}.$$

**4.42.** Bez upotrebe izvoda odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$$\sqrt{x^2+2x+10}-\sqrt{x^2+2x+2}.$$

Generalisati.

**4.43.** Izabrati realan broj $k$ tako da funkcija $f(x)=(x^2-x)/(1-kx)$ može imati ma koju realnu vrednost ako se podesno izabere realna promenljiva $x$.

Ako je $k=-1$ i $x$ realno, dokazati da funkcija $f(x)$ ne može uzimati vrednosti između $-3-2\sqrt{2}$ i $-3+2\sqrt{2}$.

Graficima ilustrovati dobijene rezultate.

**4.44.** Ako je $x$ realno, dokazati da funkcija $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$ nema vrednosti između $\dfrac{1}{4}$ i 1.

***Rešenje.*** Kako je $x=\pm\sqrt{\dfrac{4y-1}{y-1}}$, vrednosti $x$ neće biti realne ako je

$$\frac{4y-1}{y-1}<0 \Leftrightarrow y\in\left(\frac{1}{4},\, 1\right).$$

**4.45.** Data je funkcija $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}$ ($a$, $b$, $c$ realne konstante i $a\neq c$).

Dokazati da $y$ može uzeti svaku realnu vrednost za $x\in(-\infty,\ +\infty)$ ako je $b^2>(a+c)^2$.

**4.46.** Dokazati da funkcija $f(x)=\operatorname{tg} 3x \operatorname{cotg} 2x$ ne može imati vrednosti između 1/9 i 3/2.

***Rešenje.*** Ako se upotrebe formule

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \qquad \operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x},$$

funkcija $y = f(x)$ postaje

(1) $$y = \frac{3-a}{1-3a} \cdot \frac{1-a}{2},$$

gde je

(2) $$\operatorname{tg}^2 x = a.$$

Umesto jednačine (1) može se pisati

(3) $$a^2 - 2(2-3y)a + (3-2y) = 0.$$

Ako je $a$ imaginarno ili negativno, tada, prema (2), $x$ nema realnih vrednosti. Taj će slučaj nastupiti:

1° Ako jednačina (3), rešena po $a$, ima imaginarne korene, tj. ako je

$$9y^2 - 10y + 1 < 0 \iff 1/9 < y < 1;$$

2° Ako jednačina (3), rešena po $a$, ima oba negativna korena, tj. ako je

$$(2 - 3y < 0 \land 3 - 2y > 0 \land 9y^2 - 10y + 1 \geqslant 0) \iff 1 < y < 3/2.$$

Prema tome, ne postoji realna vrednost promenljive $x$ za koju bi data funkcija dobila neku vrednost između 1/9 i 3/2, što je i trebalo dokazati.

**4.47.** Za koje vrednosti $x$ je $\log \operatorname{tg} x = \log \sin x - \log \cos x$?

***Rezultat.*** $x \in \left(2k\pi, \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$.

**4.48.** Za koje vrednosti $x$ je $\log \sin^2 x = 2 \log \sin x$?

***Rezultat.*** $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$.

**4.49.** Za koje vrednosti $x$ je $\log \operatorname{tg} x = \log|\sin x| - \log|\cos x|$?

***Rezultat.*** $x \in \left(2k\pi, \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$.

---

GDE JE LOGIČKA GREŠKA?

U američkom časopisu *The American Mathematical Monthly* dat je sledeći zadatak: Iz koje tačke na zemljinoj kugli treba poći da bi smo se idući 10 km po meredijanu ka jugu, zatim 10 km po uporedniku ka istoku i na kraju 10 km po meredijanu ka severu, vratili u istu tačku.

Jedno rešenje je očigledno: treba poći iz severnog pola. Zanimljivo je da to nije jedino rešenje. Jedan poznati matematičar naglas je ovako rezonovao: Prvi i treći deo puta idu po meredijanima; dva meredijana imaju samo dve zajedničke tačke, severni i južni pol; poslednji otpada jer se iz nje ne može ići na jug, prema tome ostaje severni pol kao jedino rešenje.

U čemu je greška u rasuđivanju i kako se dobija potpuno rešenje?

# 5. JEDNAČINE

**5.1.** Da li je jednakost $\operatorname{sgn} x=1$ jednačina ili identitet?

*Napomena.* Jednakost $f(x)=0$ je idetitet ako je zadovoljena za sve vrednosti $x$ iz definicionog područja funkcije $f(x)$.

Jednakost $f(x)=0$ je jednačina ako je zadovoljena samo za deo skupa definicionog područja.

**5.2.** Dat je kvadratni trinom $P(y)=Ay^2+By+C$. Ako su $a, b$, $(a \neq b)$ nule trinoma $P(y)-y$, dokazati da su $a, b$ nule polinoma $P(P(y))-y$, i odrediti sve nule ovog polinoma.

*Rešenje.* Kako je $P(a)-a=0$, polinom $P(P(y))=y$ za $y=a$ postaje

$$P(P(a))-a=P(a)-a=0,$$

te je $y=a$ nula posmatranog polinoma.

Isto ovo važi za $y=b$, pa možemo staviti

$$P(P(y))-y=A[P(y)-a][P(y)-b].$$

Nule polinoma $P(P(y))-y$ su rešenja jednačina:

$$P(y)-a=Ay^2+By+C-a=0,$$

$$P(y)-b=Ay^2+By+C-b=0.$$

Kako je $P(a)-a=0$ i $P(b)-b=0$, koristeći se Vièteovim formulama, dobijamo da su ostale nule polinoma:

$$\alpha=-\frac{B+Aa}{A}=\frac{C-a}{Aa}, \quad \beta=-\frac{B+Ab}{A}=\frac{C-b}{Ab}.$$

**5.3.** Odrediti $a$ tako da $x=2$ bude koren jednačine

$$P(x)=6x^3-7x^2-16x+a=0,$$

i za takvo $a$ naći sve nule polinoma $P(x)$.

**5.4.** Ako su $x=2$, $x=3$ koreni jednačine

$$P(x)=2x^3+ax^2-13x+b=0,$$

odrediti $a$ i $b$ i izračunati sve nule polinoma $P(x)$ za nađene vrednosti $a$ i $b$.

**5.5.** Dokazati da je $x=1/(1-a)$ koren jednačine

$$x+\frac{1}{1-x}+\frac{x-1}{x}=a+\frac{1}{1-a}+\frac{a-1}{a} \qquad (a(a-1)\neq 0)$$

i odrediti ostale njene korene. Rešiti ovu jednačinu takođe po $a$.

*Rezultat.* $a$, $(a-1)/a$.

**5.6.** Rešiti po $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sistem jednačina

$$a_1 x_1 = x_2 x_3 \cdots x_n,$$
$$a_2 x_2 = x_3 x_4 \cdots x_1,$$
$$\vdots$$
$$a_n x_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1}.$$

*Primedba.* Na desnoj strani su redom cikličke varijacije reda $n-1$ od $n$ elemenata.

**5.7.** Odrediti $a$ tako da se oba korena jednačine $x^2-2ax+a^2-1=0$ ($a$ realan broj) nalaze u intervalu $(-2, 4)$.

*Rešenje.* Funkcija $f(x)=x^2-2ax+a^2-1$ ima za $x=a$ minimum $f(a)=-1$. Prema tome, da bi nule ove funkcije ležale u intervalu $(-2, 4)$, mora biti $-2<a<4$, $f(-2)=a^2+4a+3>0$ i $f(4)=a^2-8a+15>0$. Zajedničko rešenje ovih nejednačina je $a\in(-1, 3)$.

**5.8.** Rešiti jednačinu $|2x+1|+|x+3|=|x+6|$.

*Rešenje.* Posmatrajmo funkciju

$$
\begin{aligned}
|2x+1|+|x+3|-|x+6| &= -2x+2 && (-\infty<x<-6),\\
&= -4x-10 && (-6<x<-3),\\
&= -2x-4 && (-3<x<-1/2),\\
&= 2x-2 && (-1/2<x<+\infty).
\end{aligned}
$$

Kako se

$$
\begin{aligned}
&-2x+2 && \text{anulira za} \quad x=1\notin(-\infty, -6),\\
&-4x-10 && \text{anulira za} \quad x=-5/2\notin(-6, -3),\\
&-2x-4 && \text{anulira za} \quad x=-2\in(-3, -1/2),\\
&2x-2 && \text{anulira za} \quad x=1\in(-1/2, +\infty),
\end{aligned}
$$

jedina rešenja jednačine (1) su: $x=-2$ ili $x=1$.

**5.9.** Rešiti po $a$ jednačinu $|x-a|+|x+a|=2|a|$.

**5.10.** Rešiti jednačine:

1° $|x|-|x+a|=0$; 2° $|3x-1|+|4x-3|-|x-5|=5$;

3° $|x-2|+|x+1|=|2x+3|$; 4° $3x-2|x+1|-|x-5|=3$.

**5.11.** Rešiti jednačine

1° $|(x+2)(x-1)|-|(x+1)(x-2)|=a$,

2° $|x^2+2x|+|x^2-1|-|x|=a$,

gde je $a$ realna konstanta.

**5.12.** Za razne vrednosti $a$ odrediti rešenja iracionalnih jednačina:

1° $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+1}=1$; 2° $\sqrt{x+a}+\sqrt{x}=a$.

**5.13.** Odrediti $\lambda$ tako da sistem jednačina

$$\lambda x+y+2\lambda z=2\lambda-1, \quad x+\lambda y+2z=2 \qquad (\lambda \text{ realno})$$

ima rešenja $(x, y, z)$.

**5.14.** Rešiti sistem jednačina:

$$a^2+bc=0, \quad ab+bd=0, \quad ac+cd=0, \quad bc+d^2=0.$$

**5.15.** Rešiti sistem jednačina:

$$a^2+bc=0, \quad ab+bd=0, \quad ac+cd=0, \quad bc+d^2=1.$$

**5.16.** Za koje je vrednosti $x$ zadovoljena jednakost

$$|(x^4-4)-(x^2+2)|=|x^4-4|-(x^2+2)^2?$$

**5.17.** Rešiti jednačinu $g(x)^2=4x+1$ ako je

(1) $$g(x)=\begin{cases} x+2 & (x\geqslant 2),\\ 2x-3 & (x<2).\end{cases}$$

*Rešenje.* Budući da je

$$g(x)^2=\begin{cases} (x+2)^2 & (x>2),\\ (2x-3)^2 & (x<2),\end{cases}$$

imamo sledeće jednačine:

(2) $$(x+2)^2=4x+1 \qquad (x>2),$$

(3) $$(2x-3)^2=4x+1 \qquad (x<2).$$

Jednačina (2) nema rešenja, dok je $x=2-\sqrt{2}$ jedino rešenje jednačine (3). Prema tome, jedino rešenje date jednačine je $x=2-\sqrt{2}$.

**5.18.** Odrediti $k$ tako da nule polinoma $kx^2-(1-2k)x+k-2$ budu racionalni brojevi.

**5.19.** Ako su $a$, $b$, $c$ neparni brojevi, dokazati da koreni kvadratne jednačine

(1) $$ax^2+bx+c=0$$

nisu racionalni brojevi.

*Dokaz* **1.** Po pretpostavci je

$$a=2p+1, \quad b=2n+1, \quad c=2q+1 \qquad (p,\ n,\ q \text{ celi brojevi}).$$

Tada diskriminanta jednačine (1) glasi

$$(2n+1)^2-4(2p+1)(2q+1)=4n^2+4n-4(2p+1)(2q+1)+1$$
$$=8\left[\frac{1}{2}n(n+1)-2pq-p-q-1\right]+5.$$

Budući da je $\frac{1}{2}n(n+1)$ ceo broj, i izraz

$$\frac{1}{2}n(n+1)-2pq-p-q-1$$

je ceo broj, što znači da je diskriminanta oblika $8r+5$ ($r$ ceo broj).

Ovo ne bi mogao biti kvadrat ni parnog ni neparnog broja. Kvadrat neparnog broja je oblika $8r+1$ ($r$ nula ili prirodan broj), što ovde nije slučaj.

Ovim je dokaz završen.

***Dokaz* 2.** Pretpostavimo da je racionalan broj $p/q$ ($p$ i $q$ relativno prosti brojevi) koren jednačine (1), tj. da je

$$a\left(\frac{p}{q}\right)^2+b\frac{p}{q}+c=0,$$

odnosno

(2) $$ap^2+bpq+cq^2=0.$$

Kako su $p$ i $q$ relativno prosti, moguća su sledeća tri slučaja:

1° $p$ neparno, $q$ neparno; 2° $p$ neparno, $q$ parno; 3° $p$ parno, $q$ neparno.

Kako su $a, b, c$ neparni brojevi, bez teškoće uveravamo se da je broj $ap^2+bpq+cq^2$ neparan u sva tri navedena slučaja, pa prema tome jednakost (2) nije moguća.

Ovim je tvrđenje dokazano.

***Generalizacija.*** Da li navedenu osobinu ima jednačina $ax^m+bx^n+c=0$ ($m, n$ prirodni brojevi; $a, b, c$ neparni brojevi)?

**5.20.** Odrediti sve parove realnih brojeva $(x, y)$ koji zadovoljavaju sistem jednačina

$$x-|y+1|=1, \quad x^2+y=10.$$

***Rešenje.*** Pre svega, ne može biti $y=-1$.

Za $y<-1$, odnosno $y>-1$ dobijamo respektivno sisteme jednačina

$$x+y=0, \quad x^2+y-10=0 \quad \text{ili} \quad x-y-2=0, \quad x^2+y-10=0,$$

koji, s obzirom na uvedene uslove, određuju tražene parove

$$\left(\frac{1+\sqrt{41}}{2}, -\frac{1+\sqrt{41}}{2}\right) \quad \text{i} \quad (3, 1).$$

**5.21.** Eliminisati $x$ iz sistema jednačina

(1) $$ax^2+bx+c=0,$$

(2) $$px^2+qx+r=0 \qquad (ap\neq 0).$$

***Rešenje.*** Pretpostavimo da jednačine (1) i (2) imaju jedno zajedničko rešenje $x_0$. Tada je

(3) $$ax_0^2+bx_0+c=0,$$

(4) $$px_0^2+qx_0+r=0.$$

Množenjem jednačine (3) sa $p$, a jednačine (4) sa $a$ i oduzimanjem, dobijamo

(5) $$(ap-bq)x_0+ar-cp=0.$$

Ako je $aq-bp\neq 0$, iz ove jednačine izlazi

$$x_0=-\frac{ar-cp}{aq-bp}.$$

Za ovo $x_0$ jednačina (3) postaje

(6) $$a(ar-cp)^2-b(ar-cp)(aq-bp)+c(aq-bp)^2=0.$$

Ako je

(7) $$aq-bp=0,$$

iz (5) sleduje da takođe mora biti

(8) $$ar-cp=0.$$

I u ovom slučaju uslov (6) je ispunjen.

Pokažimo sada da važi obrnuto, tj. ako je uslov (6) ispunjen, jednačine (1) i (2) imaju jedno zajedničko rešenje.

Ako je $aq-bp\neq 0$, tada iz (6) izlazi da je broj $-\dfrac{ar-cp}{aq-bp}$ $(=x_0)$ koren i jednačine (1) i jednačine (2). Za jednačinu (1) to je očigledno, dok za jednačinu (2) treba još dokazati da je.

(9) $$p(ar-cp)^2-q(ar-cp)(aq-bp)+r(aq-bp)^2=0.$$

Ako izvršimo naznačena množenja, jednačinama (6) i (9) možemo dati oblik

(6′) $$a\{(ar-cp)^2+acq^2+prb^2-abqr-pqbc\}=0,$$

(9′) $$p\{ar-cp)^2+acq^2+prb^2-abqr-pqbc\}=0.$$

Pošto je $ap\neq 0$, jednakosti (6′) i (9′) su ekvivalentne, što znači da je $x_0$ koren i jednačine (2) Ako važi (7), pošto je $a\neq 0$, iz (6) sleduje da važi i (8).

Iz (7) i (8) izlazi $q=p\dfrac{b}{a}$ i $r=p\dfrac{c}{a}$, pa jednačina (2) postaje

$$\frac{p}{a}(ax^2+bx+c)=0.$$

U ovom slučaju jednačine (1) i (2) su ekvivalentne, tj. imaju jednaka oba korena. Uslovima (6) i (9), koji su ekvivalentni, možemo dati simetrični oblik

(10) $$(ar-cp)^2+acq^2+prb^2-abqr-pqbc=0.$$

Prema tome, dokazali smo da je uslov (10) potreban i dovoljan da bi jednačine (1) i (2) imale zajednički koren. Jednakost (10) je rezultat eliminacije.

## 5.22. Rešiti jednačinu $\sin 3x-\cos 2x=0$.

***Rešenje.*** Umesto date jednačine posmatrajmo njoj ekvivalentnu jednačinu

$$\sin 3x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=0 \iff 2\cos\frac{3x+\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{2}\sin\frac{3x-\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{2}=0.$$

Odavde izlazi

$$\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}=0 \iff \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \iff x_k'=\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots),$$

$$\sin\frac{5x-\frac{\pi}{2}}{2}=0 \iff \frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}=n\pi \iff x_n''=\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}n\pi \qquad (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Među rešenjima $x_n''$ pojavljuju se i takva koja se nalaze među rešenjima $x_k'$ i to za one vrednosti $n$ koje zadovoljavaju jednačinu

$$\frac{1}{10}+\frac{2}{5}n=\frac{1}{2}+2k \qquad (n \text{ i } k \text{ celi brojevi}).$$

**5.23.** Rešiti jednačinu $8\cos x=\frac{\sqrt{3}}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$.

*Uputstvo.* Ako je $\sin x\neq 0$ i $\cos x\neq 0$, data jednačina postaje

$$4\sin 2x\cos x=\sqrt{3}\cos x+\sin x,$$

odnosno

$$2(\sin 3x+\sin x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x \Leftrightarrow \sin 3x=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right).$$

**5.24.** Odrediti sva rešenja jednačine $\cos px=\sin qx$.

**5.25.** Rešiti jednačine:

1° $\sin 3x=4\sin x\cos 2x$,

2° $\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x$,

3° $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$,

4° $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$.

*Uputstvo.* 3° Grupisati članove na levoj strani ovako:

$$(\sin x+\sin 3x)+(\sin 2x+\sin 4x).$$

4° Predstaviti jednačinu u obliku

$$(\sin x+\sin 3x)-(\cos x+\cos 3x)+(\sin 2x-\cos 2x)=0.$$

**5.26.** Po $x$ rešiti jednačinu $\sin x+2\sin x\cos(a-x)=\sin a$.

*Rezultat.* $x_k'=\frac{1}{3}(a+2k\pi)$, $x_n''=a+(2n+1)\pi$ $(k,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots)$.

**5.27.** Rešiti trigonometrijsku jednačinu

$$4\cos\theta\cos 2\theta\cos 3\theta-1=0.$$

*Rešenje.* Primenivši formulu $2\cos p\cos q=\cos(p+q)+\cos(p-q)$, data jednačina postaje

$$2\cos 2\theta(\cos 4\theta+\cos 2\theta)-1=0.$$

S obzirom da je $2\cos^2 2\theta-1=\cos 4\theta$, dobija se

$$\cos 4\theta(1+2\cos 2\theta)=0,$$

tj.

$$\cos 4\theta=0 \text{ i } \cos 2\theta=-\frac{1}{2}.$$

Prema tome, rešenja jednačine su:

$$\theta_k'=(2k+1)\frac{\pi}{8} \text{ ili } \theta_n''=n\pi\pm\frac{\pi}{3} \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots;\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots).$$

**5.28.** Rešiti jednačinu

$$4\cos\theta\cos 2\theta\cos 5\theta+1=0.$$

*Rešenje.* Primenom formule $2\sin p\cos q=\sin(p+q)+\sin(p-q)$, data jednačina postaje,

(1) $$\frac{2\cos\theta\cos 2\theta}{\sin 2\theta}(\sin 7\theta-\sin 3\theta)+1=0.$$

Kako je

$$2\sin 7\theta\cos 2\theta=\sin 9\theta+\sin 5\theta,\quad 2\sin 3\theta\cos 2\theta=\sin 5\theta+\sin\theta,$$

jednačina (1) dobija oblik

$$\frac{\cos\theta}{\sin 2\theta}(\sin 9\theta-\sin\theta)+1=0.$$

Ako se ovde stavi $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$, nalazi se

(2) $$\frac{1}{\sin\theta}(\sin 9\theta+\sin\theta)=0.$$

Kako je

$$\sin 9\theta+\sin\theta=2\sin 5\theta\cos 4\theta,$$

jednačina (2) dobija oblik

$$\frac{\sin 5\theta\cos 4\theta}{\sin\theta}=0.$$

Prema tome, rešenja date jednačine dobijamo iz relacija

$$\sin 5\theta=0\quad(\sin\theta\neq 0)\quad\text{ili}\quad\cos 4\theta=0\quad(\sin\theta\neq 0).$$

Odavde sleduje:

$$\theta_k'=\frac{k\pi}{5},\qquad \theta_n''=(2n+1)\frac{\pi}{8},$$

gde $n$ i $k$ uzimaju sve vrednosti $0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ s tim da $k$ ne bude multipl broja 5 zbog uslova $\sin\theta\neq 0$.

**5.29.** Odrediti $a$ tako da jednačina $\sin\theta\sin 2\theta\sin 3\theta=a$ ima realnih rešenja. Generalisati na jednačinu $\sin px\sin qx\sin rx=a$ ($p$, $q$, $r$ realni brojevi).

**5.30.** Odrediti $a$ tako da jednačina $\sin^4 x+\cos^4 x=a$ ima realnih rešenja, pa ih zatim naći.

*Rešenje* 1. Primenom formula $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$, $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$, posmatrana jednačina dobija oblik

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2x=a,\quad\text{tj.}\quad\cos 4x=4a-3.$$

Da bi rešenja ove jednačine bila realna, potrebno je i dovoljno da bude

$$|4a-3|<1,\quad\text{tj.}\quad a\in\left[\frac{1}{2},\,1\right].$$

Tada su rešenja data sa $x=\pm\frac{1}{4}\arccos(4a-3)+\frac{k\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

*Rešenje* 2. Do uslova za realnost korena možemo doći posmatrajući grafike funkcija $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ i $y=a$. Kako je za prvu funkciju $y_{max}=1$ i $y_{min}=\frac{1}{2}$, da bi postojale presečne tačke grafika posmatranih funkcija, potrebno je i dovoljno da je $a\in\left[\frac{1}{2},\,1\right]$.

**5.31.** Rešiti jednačinu $\dfrac{a\sin x+b}{b\cos x+a}=\dfrac{a\cos x+b}{b\sin x+a}$ $(ab>0)$.

*Rešenje.* Ako je $b\cos x+a\neq 0$ i $b\sin x+a\neq 0$, tada je ova jednačina ekvivalentna jednačini

$$(\cos x-\sin x)\ [ab(\cos x+\sin x)+a^2+b^2]=0.$$

Faktor

$$ab(\cos x+\sin x)+a^2+b^2=ab\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+a^2+b^2=ab\sqrt{2}\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{a^2+b^2}{ab\sqrt{2}}\right]$$

ne anulira se ni za jedno realno $x$ jer je

$$\frac{a^2+b^2}{ab\sqrt{2}}>\frac{a^2+b^2}{2ab}>1.$$

Drugi faktor $\cos x-\sin x$ anulira se za

(1) $$x=\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Potrebno je još da za vrednost (1) budu ispunjeni uslovi

$$b\cos x+a\neq 0 \quad \text{i} \quad b\sin x+a\neq 0.$$

Oni se svode na jedini uslov

$$(-1)^k b\frac{\sqrt{2}}{2}+a\neq 0.$$

Dakle, data trigonometrijska jednačina ima rešenje (1) ako je $a\neq(-1)^{k-1}b\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ako je $a=(-1)^{k-1}b\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, data jednačina nema rešenja.

**5.32.** Dokazati da su sva rešenja jednačine

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}4x=0$$

određena pomoću

$$5x=k\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots) \quad \text{ili} \quad 8\cos 2x=1\pm\sqrt{17}.$$

*Uputstvo.* Poći od identiteta

$$(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}4x)+(\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}3x)=\frac{\sin 5x}{\cos x\cos 4x}+\frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x}.$$

Da li se ovim postupkom može rešiti generalnija jednačina

$$\operatorname{tg}px+\operatorname{tg}(p+q)x+\operatorname{tg}(p+2q)x+\operatorname{tg}(p+3q)x=0 \quad (p, q \text{ realne konstante})?$$

Generalisati postupak na jednačine navedenog tipa, gde je na levoj strani broj članova veći od 4.

**5.33.** Rešiti jednačinu $\cos 4\theta+\cos 2\theta+\cos\theta=0$.

*Rezultat.* $\theta_n'=(2n+1)\dfrac{\pi}{4}$; $\theta_k''=(3k\pm 1)\dfrac{2\pi}{9}$ $(n, k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

**5.34.** Rešiti jednačinu $\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1-\cos x}{1-\sin|x|}$.

**5.35.** Po $x$ rešiti jednačinu

(1) $$\operatorname{tg} ax \operatorname{tg} bx = 1 \qquad (a \neq -b \text{ i } a, b \neq 0).$$

***Rešenje.*** Ako je $\cos ax \cos bx \neq 0$, dobija se

$$\sin ax \sin bx = \cos ax \cos bx.$$

Odavde jedno za drugim imamo:

$$\cos(a+b)x = 0 \Leftrightarrow (a+b)x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2(a+b)}(1+2k).$$

Rešenja jednačine (1) biće samo one vrednosti $x_k$ za koje je

$$a x_n \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$b x_m \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \qquad (m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

tj.

(2) $$x_n \neq \frac{\pi}{2a}(1+2n\pi) \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

(3) $$x_m \neq \frac{\pi}{2b}(1+2m\pi) \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

To znači da celi brojevi $m$ i $n$ uzimaju samo one vrednosti koje ispunjavaju uslove (2) i (3).

**5.36.** Rešiti jednačinu $(x^x)^x = x^{(x^x)}$ $(x > 0)$.

Napisati sve moguće izraze koji se dobijaju polazeći od $x^{x^{x^x}}$, stavljajući sve moguće zagrade kao u slučaju $x^{x^x}$.

Rešiti zatim jednačine koje se dobijaju izjednačavajući dva po dva od dobijenih izraza.

**5.37.** Odrediti realna rešenja sistema jednačina:

$$\frac{2x_1^2}{1+x_1^2} = x_2, \quad \frac{2x_2^2}{1+x_2^2} = x_3, \quad \frac{2x_3^2}{1+x_3^2} = x_1.$$

***Rešenje.*** Jedno rešenje je $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Da bismo odredili ostala rešenja, posmatrajmo dati sistem u obliku

$$\frac{1}{x_1^2} + 1 = \frac{2}{x_2}, \quad \frac{1}{x_2^2} + 1 = \frac{2}{x_3}, \quad \frac{1}{x_3^2} + 1 = \frac{2}{x_1}.$$

Smenom $1/x_1 = y_1$, $1/x_2 = y_2$, $1/x_3 = y_3$ imamo

(1) $$y_1^2 + 1 = 2y_2, \quad y_2^2 + 1 = 2y_3, \quad y_3^2 + 1 = 2y_1.$$

Ako ove jednačine saberemo, dobijamo

$$(y_1-1)^2 + (y_2-1)^2 + (y_3-1)^2 = 0,$$

odakle izlazi $y_1 = y_2 = y_3 = 1$, odnosno $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Poslednja jednačina isključuje mogućnost postojanja drugih rešenja, jer iz prve jednačine sistema (1) izlazi da je $y_2 > y_1$, iz druge $y_3 > y_2$ i iz treće $y_1 > y_3$. To je mogućno samo za $y_1 = y_2 = y_3$.

*Generalizacija.* Odrediti realna rešenja sistema jednačina:

$$\frac{2x_1^2}{1+x_1^2}=x_2, \quad \frac{2x_2^2}{1+x_2^2}=x_3, \quad \ldots, \quad \frac{2x_n^2}{1+x_n^2}=x_1.$$

**5.38.** Dokazati da sistem jednačina

(1) $$x_1-x_2=a, \quad x_3-x_4=b, \quad x_1+x_2+x_3+x_4=1$$

ima bar jedno pozitivno rešenje $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$, $x_4>0$, ako i samo ako je $|a|+|b|<1$.

***Rešenje.*** Neka je

(2) $$x_1+x_2=\lambda \quad (\lambda \text{ realan broj}).$$

Iz jednačina (1) i (2) izlazi

$$2x_1=a+\lambda, \quad 2x_2=-a+\lambda, \quad 2x_3=b+1-\lambda, \quad 2x_4=-b+1-\lambda.$$

Rešenja su pozitivna ako je

$$a+\lambda>0, \quad -a+\lambda>0, \quad b+1-\lambda>0, \quad -b+1-\lambda>0.$$

Ako prvu nejednačinu saberemo sa trećem i četvrtem, pa zatim drugu jednačinu saberemo sa trećem i četvrtem, dobijamo sistem nejednačina

$$a+b+1>0, \quad a-b+1>0, \quad -a+b+1>0, \quad -a-b+1>0,$$

koji je ekvivalentan sa $|a|+|b|<1$.

---

### O GREŠKAMA MATEMATIČARA

Zablude, greške i mane velikih mnogo su poučnije nego ispravna dela malih.

*L. Ber* (1786—1837)

Ko ne radi, neće ni grešiti. Onaj koji mnogo radi, i kad je najjači i najsigurniji u svome poslu, podložan je greškama koje čak ne moraju ni biti u pravoj ili obrnutoj proporciji sa njegovom jačinom i sigurnošću. Grešenje je gotovo neminovno i za najveće naučnike i za najpouzdanije specijaliste u pojedinim oblastima nauke. Istorija nauka pruža za to mnoge, često neverovatne primere.

o o

Lagrange je dokazivao (Oeuvres, t. III. str. 714) da je svaki ceo broj $N$ jednak razlici kvadrata dva cela broja, što, npr., nije tačno kad je $N$ dvostruki prost broj različit od 4.

Fermat je tvrdio da su brojevi $2^{2^n}+1$ uvek prosti; međutim, Euler je dokazao da je $2^{2^5}+1$ deljivo sa 641.

Euler je tvrdio da su brojevi: $232\cdot 57^2+1$ i $232\cdot 117^2+1$ prosti, a u stvari oni su složeni i to: prvi je deljiv sa 179, a drugi sa 271. Sličnih primera ima još mnogo i to kod poznatih imena.

Ovo treba ovako shvatiti: ono što je dopušteno onima koji imaju za sobom veliki naučni bagaž i koji su mnogo uradili pa u nečemu i grešili, ne mora biti dopušteno i onima kod kojih ono što su uradili nije mnogo naspram onoga u čemu su grešili.

(Redigovano prema članku: Mihailo Petrović: Greške matematičara, Glasnik Jugoslovenskog profesorskog društva, knjiga 13, Beograd, 1933.)

# 6. NEJEDNAKOSTI

**6.1.** Za koje $x$ važi nejednakost

(1) $$\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5},$$

a za koje nejednakost

(2) $$\sqrt{x+6}\leqslant\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}?$$

***Rešenje.*** Funkcije

$$\sqrt{x+6},\quad \sqrt{x+1},\quad \sqrt{2x-5}$$

jednovremeno su realne ako je $x\geqslant 5/2$.

Smisao nejednakosti ostaje u važnosti posle dizanja na kvadrat izraza na levoj i desnoj strani, naime:

$$x+6>3x-4+2\sqrt{2x^2-3x-5} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x-5}<5-x.$$

Poslednja nejednakost ima smisla ako je $5-x>0$, tj. $x<5$.

Posle dizanja na kvadrat, poslednja relacija postaje

$$(x-3)(x+10)<0$$

koja kazuje da $x$, pored ranijeg uslova $x\in[5/2, 5)$, mora zadovoljavati nov uslov $x\in(-10, 3)$

Dakle, (1) važi za $x\in[5/2, 3)$.

Nejednakost (2) važi za $x\in(3, +\infty)$.

**6.2.** Rešiti nejednačinu $\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-19}>\sqrt{5x-27}$.

***Rezultat.*** $19/3\leqslant x<9$.

**6.3.** Odrediti oblasti tačaka $(x, y)$ u ravni čije koordinate zadovoljavaju istovremeno sistem nejednačina:

$$2x+3y-6<0,\quad y+2>0,\quad x+1>0,\quad x^2+y^2-1>0.$$

**6.4.** Ako su $a$, $b$, $t$ pozitivni brojevi, dokazati da je $at+b/t\geqslant 2\sqrt{ab}$.

**6.5.** Grafičkim i računskim putem rešiti nejednačinu

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-1}>\sqrt{x+1}.$$

**6.6.** Dokazati da se broj

$$M=\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}\qquad (a,\ b \text{ realni; } \lambda>0)$$

nalazi između $a$ i $b$.

**6.7.** Odrediti oblasti ravni $Oxy$ u kojima treba da se nalazi tačka $M(x, y)$, da bi njene koordinate zadovoljavale nejednačinu

$$(x^2-4xy)/(x^2+3xy+2y^2)<0.$$

**6.8.** Dokazati $\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 < \frac{1}{2n}$.

***Dokaz.*** $\left[\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right]^2 = \frac{1\cdot(2n-1)}{(2n)\cdot(2n)}\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{(2\nu-1)(2\nu+1)}{(2\nu)(2\nu)} = \frac{1\cdot(2n-1)}{(2n)(2n)}\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{4\nu^2-1}{4\nu^2} < \frac{1}{2n}$.

Pri dokazu uzeto je u obzir da je

$$\frac{2n-1}{2n}<1 \quad \text{i} \quad \frac{4\nu^2-1}{4\nu^2}<1.$$

**6.9.** Rešiti nejednačinu $\log_5 x > \log_{125}(3x-2)$.

**6.10.** Dokazati nejednakost

$$[a(a+b)+b(b+c)+c(c+a)]^{1/2} < a+b+c \qquad (a, b, c>0).$$

Generalisati.

***Rešenje.*** Pretpostavimo da za neku trojku brojeva $(a, b, c)$ važi

$$[a(a+b)+b(b+c)+c(c+a)]^{1/2} > a+b+c.$$

Kako je $a+b+c>0$, takođe važi

$$a(a+b)+b(b+c)+c(c+a) > a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$

tj.

$$0 > ab+ac+bc.$$

Pošto su $a, b, c$ pozitivni brojevi, poslednja nejednakost ne važi ni za jedno $(a, b, c)$, što znači da je data nejednakost tačna.

**6.11.** Ako je $0<a<2c$ ispitati da li je za svako $x$

(1)
$$-\frac{1}{2c+a} \leqslant \frac{x+a}{x^2+ax+c^2} \leqslant \frac{1}{2c-a}.$$

***Rešenje.*** Stavimo

$$y = \frac{x+a}{x^2+ax+c^2},$$

tj.

(2)
$$yx^2+(ay-1)x+c^2y-a=0.$$

Ova jednačina ima po $x$ realno rešenje ako i samo ako je

$$(ay-1)^2-4y(c^2y-a) \geqslant 0,$$

tj.

(3)
$$(a^2-4c^2)y^2+2ay+1 \geqslant 0.$$

Kako je $0<a<2c$, biće $a^2<4c^2$, tj. $a^2-4c^2<0$. Nejednakost (3) važi ako je

$$y_1 \leqslant y \leqslant y_2,$$

gde je

$$y_1 = -\frac{1}{2c+a}, \qquad y_2 = \frac{1}{2c-a}.$$

*Primedba* 1. Odrediti vrednosti $x$ za koje je ispunjen znak jednakosti u levoj nejednakosti i takođe u desnoj.

*Primedba* 2. Dokazati nejednakost (1) pomoću ekstremnih vrednosti funkcije $y$.

**6.12.** Odrediti $a$ tako da nejednakost

(1) $$\frac{x+a}{x^2+x+1} < \frac{x}{x^2+2x+3}$$

važi za svako $x$.

***Rešenje.*** Kako su $x^2+x+1$ i $x^2+2x+3$ pozitivni za svako $x$, nejednakost (1) ekvivalentna je nejednakosti

(2) $$(a+1)x^2+2(a+1)x+3a<0.$$

Da bi nejednakost (2) važila za svako $x$, moraju biti ispunjeni uslovi:

$$a+1<0 \quad \text{i} \quad (a+1)^2-3a(a+1)<0,$$

$$\Leftrightarrow a+1<0 \quad \text{i} \quad (a+1)(1-2a)<0,$$

$$\Leftrightarrow a<-1 \quad \text{i} \quad \left(a<-1 \text{ ili } a>\frac{1}{2}\right).$$

Dakle, nejednakost (1) važi za svako $x$ ako je $a<-1$.

**6.13.** Odrediti potrebne i dovoljne uslove koje moraju ispunjavati $a$ i $b$ da bi nejednačina $\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}\geqslant 1$ imala rešenja.

***Odgovor.*** Ako, i samo ako, važi nejednakost $b-a>1$, data nejednačina ima rešenje

$$b<x<\frac{1}{2}[(b-a-1)^2+4b].$$

**6.14.** Rešiti nejednakost $\sqrt{x^2+y^2-2}>x-y$.

***Uputstvo.*** Posmatrati slučajeve: 1° $x-y<0$; $x^2+y^2-2>0$; 2° $x-y>0$; $x^2+y^2-2>(x-y)^2$ (tj. $xy>1$). Primeniti grafički metod.

**6.15.** Dokazati:

$$(a\geqslant 1 \wedge b+c<a+1 \wedge b\leqslant c) \Rightarrow b<a.$$

***Rešenje.***

$$b\leqslant c \Leftrightarrow 2b\leqslant b+c.$$

$$(b+c<a+1 \wedge 2b\leqslant b+c) \Rightarrow 2b<a+1.$$

$$(a\geqslant 1 \wedge 2b<a+1) \Rightarrow 2b<2a \Leftrightarrow b<a.$$

**6.16.** Dokazati:

$$(a+b+c=0 \wedge a\geqslant -1/4 \wedge b\geqslant -1/4 \wedge c\geqslant -1/4)$$
$$\Rightarrow (4a+1)^{1/2}+(4b+1)^{1/2}+(4c+1)^{1/2}\leqslant 3.$$

***Uputstvo.*** Poći od nejednakosti $(4a+1)^{1/2}\leqslant 2a+1$ $(a\geqslant -1/4)$, koju prethodno treba dokazati. Generalisati.

**6.17.** Ispitati da li važi ekvivalencija

$$(x>0 \wedge y>0) \Leftrightarrow (x+y>0 \wedge xy>0).$$

**6.18.** 1° Da li iz uslova

(1) $$x>0, \quad y>0, \quad z>0$$

sleduje

(2) $$x+y+z>0, \quad xyz>0?$$

2° Da li važi (2) $\Rightarrow$ (1)?

3° Da li su uslovi (1) i (2) ekvivalentni?

*Primedba.* Generalisati.

**6.19.** Dokazati nejednakost

$$\sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{n} x_i x_k \geqslant 0 \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ realni}).$$

*Dokaz.* Ova nejednakost neposredno sleduje iz identiteta

$$2\sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{n} x_i x_k = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

**6.20.** Za koje vrednosti $a$ važi

$$-1<\frac{1}{2a}\left[1-a-\sqrt{(1-a)^2-4a^2}\right]<+1?$$

*Odgovor.* $-1<a<1/3$ $(a\neq 0)$.

*Primedba.* Da li se do rezultata može doći posmatranjem kvadratne jednačine čiji su koreni

$$\frac{1}{2a}\left[1-a-\sqrt{(1-a)^2-4a^2}\right], \qquad \frac{1}{2a}\left[1-a+\sqrt{(1-a)^2-4a^2}\right]?$$

**6.21.** Ako je $a, b, c, d\geqslant 0$ i $c+d\leqslant \min(a, b)$, dokazati da je

$$ad+bc\leqslant ab, \quad ac+bd\leqslant ab.$$

*Rešenje.*

| | |
|---|---|
| $ad+bc\leqslant (c+d)\max(a,b)$ | $ac+bd\leqslant (c+d)\max(a,b)$ |
| $\leqslant \min(a,b)\max(a,b)$ | $\leqslant \min(a,b)\max(a,b)$ |
| $= ab.$ | $= ab.$ |

*Primedba.* Da li se ovaj rezultat može generalisati?

**6.22.** Dokazati ekvivalenciju

$$|b-c|<a<b+c \Leftrightarrow |a-c|<b<a+c \qquad (a, b, c \text{ realni brojevi}).$$

**6.23.** Dokazati da za svako realno $a$ važi

$$f(a)=\cos 3a+4\cos 2a+8\cos a+5\geqslant 0.$$

*Rešenje.* $f(a)=4\cos^3 a+8\cos^2 a+5\cos a+1=(2\cos a+1)^2(\cos a+1).$

$(\forall a)\ f(a)\geqslant 0.$

**6.24.** Dokazati nejednakost $(a+b+c)(bc+ca+ab)>9\,abc$, gde su $a$, $b$, $c$ pozitivni brojevi koji nisu svi međusobno jednaki.

*Rešenje.* $$\begin{aligned}(a+b+c)(bc+ca+ab)-9\,abc&=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-6\,abc\\&=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\\&>0.\end{aligned}$$

Odavde se neposredno izvodi navedena nejednakost.

*Primedba.* Koju izmenu treba učiniti u datoj nejednakosti ako su $a$, $b$, $c$ negativni brojevi?

**6.25.** Ako je $x$ realno, dokazati da funkcija $4x(1-x)/(1+x)^2$ ne može imati vrednosti veće od $1/2$.

**6.26.** Za koje je vrednosti $a$ uslov

$$(x^2+ax+1)/(x^2+4x+8)<8$$

ispunjen za svako $x$?

*Rešenje* Kako je $x^2+4x+8>0$ za svako $x$, data nejednačina ekvivalentna je nejednačini

$$7x^2-(a-32)x+63>0.$$

Poslednja nejednačina biće zadovoljena za svako $x$ ako je

$$(a-32)^2-42^2<0,$$

odakle dobijamo da $a$ mora biti u intervalu $(-10,\ 74)$.

**6.27.** Odrediti $k$ da za svako $x$ bude

$$|(x^2-kx+1)/(x^2+x+1)|<3.$$

*Uputstvo.* Data nejednakost ekvivalentna je skupu nejednakosti

$$-3<(x^2-kx+1)/(x^2+x+1)<+3.$$

*Rezultat.* $k\in(-5,\ +1)$.

**6.28.** Dokazati:

1° $\{(3x-1)/(2-x)\}^{1/2}>1 \Leftrightarrow x\in(3/4,\ 3)$;

2° $|(x^2-2x+3)/(x^2-4x+3)|\leqslant 1 \Leftrightarrow x\leqslant 0$.

**6.29.** Za koje vrednosti $x$ važi $(1-\sqrt{1-8x^2})/(2x)\leqslant 1$?

**6.30.** Za koje vrednosti $x$ važi $-2<(2x^2-15x+16)/(x^2-4x+3)<0$?

**6.31.** U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxy$ šrafirati oblasti

1° $xy(x^2-y^2)>0$;  2° $(x^2-1)(x^2-y^2)<0$.

**6.32.** U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu šrafirati oblast

$$\{(x, y) \mid y<x\} \cap \left\{(x, y) \mid y>-\frac{1}{2}(x-3)\right\},$$

tj. odrediti oblast čije tačke $(x, y)$ ispunjavaju uslove:

$$y<x \quad \text{i} \quad y>-\frac{1}{2}(x-3).$$

Tako isto šrafirati oblasti

$$\{(x, y) \mid y^2<x\} \cap \{(x, y) \mid x^2+y^2>1\}; \qquad \{(x, y) \mid y^3<x\} \cap \{(x, y) \mid x<y^2\}.$$

**6.33.** Odrediti sve vrednosti $x \, (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ za koje je

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x>0.$$

***Rezultat.*** Ova nejednačina važi za

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ili} \quad x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \quad \text{ili} \quad x \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

**6.34.** Rešiti nejednačinu $\cos\varphi+\sin\varphi>1$, stavljajući $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$, ili primenjujući neki drugi postupak.

**6.35.** Za koje vrednosti $x$ važi nejednakost $\sin x>2\cos^2 x-1$?

***Uputstvo.*** Ovo najpre utvrditi za $x \in [0, T]$, gde je $T$ osnovni period funkcije

$$\sin x-2\cos^2 x+1.$$

**6.36.** Rešiti nejednačine:

$1°$ $x+|x|<1$; $2°$ $x-|x|>2$; $3°$ $|x^2-x|+x>1$; $4°$ $\sin x+|\sin x|>1$.

**6.37.** Ako je $0<x, y<\pi/2$, dokazati da je:

$$\sin(x+y)<\sin x+\sin y; \qquad \sin(x+y)<\cos x+\cos y.$$

**6.38.** Ako je $x, y>0$ i $0<x+y<\pi/2$, dokazati:

$$0<\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y<1; \qquad \operatorname{tg}(x+y)>\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y.$$

**6.39.** Dokazati

$$(x, y, z>0 \wedge 0<x+y+z<\pi/2) \Rightarrow \sin(x+y+z)<\sin x+\sin y+\sin z.$$

Generalisati.

**6.40.** Za koje vrednosti $x$ važi sistem nejednakosti $\sin 4x>0$, $\cos 4x<-\frac{1}{2}$ ?

**6.41.** Odrediti oblasti u $xy$-ravni u kojima treba da se nalazi tačka $(x, y)$ da bi važila nejednakost $\sin(x+y)>0$.

**6.42.** Rešiti skup nejednačina

$$y^2+4x-4>0, \qquad 8x^2-2x-3y-6>0.$$

**6.43.** Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1 \qquad (n \text{ prirodan broj } >1).$$

***Rešenje*** Kako je, za $n>1$,

$$\frac{1}{n+1}>\frac{1}{n^2},\quad \frac{1}{n+2}>\frac{1}{n^2},\quad \ldots,\quad \frac{1}{n^2-1}>\frac{1}{n^2},$$

dobija se

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}+\frac{n^2-n}{n^2}=1.$$

**6.44.** Dokazati nejednakost

$$(1)\qquad 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n} \qquad (n\geqslant 2).$$

***Rešenje.*** Ako je $k<n(\geqslant 2)$, onda je $\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$. Stavljamo li ovde redom $k=1, 2, \ldots, n$, posle sabiranja tako dobijenih nejednakosti dobijamo

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow (1).$$

**6.45.** Dokazati nejednakosti:

$$(1)\qquad \min\left(\frac{p-m}{p+m},\ \frac{p+m}{p-m}\right)\leqslant\frac{x^2-2mx+p^2}{x^2+2mx+p^2}\leqslant\max\left(\frac{p-m}{p+m},\ \frac{p+m}{p-m}\right) \qquad (0<|m|<|p|),$$

$$(1')\qquad \frac{x^2-2mx+p^2}{x^2+2mx+p^2}\leqslant\min\left(\frac{p-m}{p+m},\ \frac{p+m}{p-m}\right)$$

ili $\qquad (0<|p|<|m|).$

$$(1'')\qquad \frac{x^2-2mx+p^2}{x^2+2mx+p^2}\geqslant\max\left(\frac{p-m}{p+m},\ \frac{p+m}{p-m}\right)$$

***Rešenje.*** Neka je

$$(2)\qquad y=\frac{x^2-2mx+p^2}{x^2+2mx+p^2}.$$

Ako je $m=0$, tada je $y=1$. Pretpostavimo da je $m\neq 0$ i napišimo (2) u obliku

$$(y-1)x^2+2m(y+1)x+p^2(y-1)=0.$$

Da bi rešenja ove jednačine po $x$ bila realna, potrebno je i dovoljno da bude

$$m^2(y+1)^2-p^2(y-1)^2\geqslant 0,\quad \text{tj.}\quad (m^2-p^2)y^2+2(m^2+p^2)y+m^2-p^2\geqslant 0.$$

Pretpostavimo da je $|m|\neq|p|$. Najpre imamo

$$(m^2-p^2)y^2+2(m^2+p^2)y+m^2-p^2=(m^2-p^2)(y-y_1)(y-y_2),$$

gde je

$$y_1=\frac{p-m}{p+m},\quad y_2=\frac{p+m}{p-m}.$$

Ako je $mp>0$ i $0<|m|<|p|$, tada je

$$\frac{p-m}{p+m}\leqslant\frac{x^2-2mx+p^2}{x^2+2mx+p^2}\leqslant\frac{p+m}{p-m}.$$

Ako je $mp<0$ i $0<|m|<|p|$, tada je

$$\frac{p+m}{p-m}<\frac{x^2-2mx+p^2}{x^2+2mx+p^2}<\frac{p-m}{p+m}.$$

Ako je $0<|p|<|m|$ i $mp>0$, tada je

$$\frac{x^2-2mx+p^2}{x^2+2mx+p^2}<\frac{p+m}{p-m} \quad \text{ili} \quad \frac{x^2-2mx+p^2}{x^2+2mx+p^2}>\frac{p-m}{p+m}.$$

Ako je $0<|p|<|m|$ i $mp<0$, tada je

$$\frac{x^2-2mx+p^2}{x^2+2mx+p^2}<\frac{p-m}{p+m} \quad \text{ili} \quad \frac{x^2-2mx+p^2}{x^2+2mx+p^2}>\frac{p+m}{p-m},$$

što zajedno sa prethodnim nejednakostima dokazuje (1′) i (1″).

**6.46.** Dati donje i gornje ograničenje za funkciju

$$y=(x^2-2x\cos a+1)/(x^2-2x\cos b+1) \quad (a\neq \pm b+2n\pi;\ n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

*Rešenje.* Prethodnu jednakost napišimo u obliku

$$(1-y)x^2-2(\cos a-y\cos b)x+1-y=0.$$

Da bi $x$ bilo realno, potrebno je i dovoljno da bude

(1) $\quad (\cos a-y\cos b)^2-(1-y)^2 \geqslant 0$, tj. $(\sin^2 b)y^2+2(\cos a\cos b-1)y+\sin^2 a \leqslant 0.$

Ako je $\sin b=0$ ($\Leftrightarrow b=k\pi$), dobijamo sledeće ograničenje

$$\frac{1}{2}(1-(-1)^{k+1}\cos a)\leqslant y<+\infty.$$

Ako je $b\neq k\pi$ i $a\neq \pm b+2n\pi$, na osnovu (1) nalazimo

$$\min\left(\frac{1-\cos a}{1-\cos b}, \frac{1+\cos a}{1+\cos b}\right)<y<\max\left(\frac{1-\cos a}{1-\cos b}, \frac{1+\cos a}{1+\cos b}\right).$$

**6.47.** Ako je $a=\cos\alpha$, $c=\sin\alpha$, $b^2=\sin 2\alpha$ $(0<\alpha<\pi/4)$, dokazati da za funkciju

$$f(x)=(ax^2+bx+c)/(cx^2+bx+a)$$

važi

$$(\sec\alpha-1)(\operatorname{cosec}\alpha+1)\leqslant f(x)\leqslant(\sec\alpha+1)(\operatorname{cosec}\alpha-1).$$

**6.48.** Dokazati da za svako $x$ važi

$$-1\leqslant\frac{x^2\cos\theta-2x+\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\leqslant+1 \qquad (\theta\neq k\pi;\ k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

**6.49.** Odrediti parove celih brojeva $x$ i $y$ koji zadovoljavaju sistem nejednačina

$$y-|x^2-2x|+\frac{1}{2}>0, \quad y+|x-1|<2.$$

*Rešenje.* Napišimo dati sistem nejednačina u obliku

(1) $$y+\frac{1}{2}>|x^2-2x| \quad \text{i} \quad 2-y>|x-1|.$$

Kako su moduli $|x^2-2x|$ i $|x-1|$ nenegativni, iz (1) izlazi

$$y>-\frac{1}{2}, \quad y<2,$$

što daje cele vrednosti $y=0$ ili $y=1$.

Zamenimo li $y=0$ u (1), dobijamo skup nejednačina

$$|x^2-2x|<\frac{1}{2}, \quad |x-1|<2.$$

Cela rešenja prve nejednačine su $x=0$ ili $x=2$, a druge $x=0, 1, 2$. Prema tome, zajednička rešenja su $x=0$ ili $x=2$. Dakle, parovi celih brojeva koji odgovaraju $y=0$ su:

$$x_1=0, \quad y_1=0;$$
$$x_2=2, \quad y_2=0.$$

Zamenom $y=1$ u skupu (1) dobijamo

$$|x^2-2x|<\frac{1}{2}, \quad |x-1|<1.$$

Cela rešenja prve nejednačine su $x=0, 1, 2$, a druge samo $x=1$. Stoga je treći par rešenja

$$x_3=1, \quad y_3=1.$$

**6.50.** Da bi $a$, $b$, $c$ bile dužine strana jednog trougla, dokazati da je potrebno i dovoljno da bude ispunjen uslov

$$\max(a, b, c)<\frac{1}{2}(a+b+c).$$

**6.51.** 1° Ako su $a$, $b$, $c$ dužine strana jednog trougla koji ne degeneriše u duž, dokazati da je

(1) $$\frac{1}{2}a^2<b^2+c^2\leqslant 2a^2,$$

gde je $a=\max(a, b, c)$.

2° Da li su uslovi (1) dovoljni da bi postojao trougao (koji ne degeneriše u duž) čije su dužine strana $a$, $b$, $c$?

***Rešenje.*** 1°

(2) $$\{b<a \wedge c<a\} \Rightarrow b^2+c^2<2a^2.$$

(3) $$a<b+c \Rightarrow a^2<b^2+2bc+c^2.$$

(4) $$(b-c)^2>0 \Leftrightarrow 2bc<b^2+c^2.$$

(5) $$(3)\wedge(4) \Rightarrow a^2<2(b^2+c^2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}a^2<b^2+c^2.$$

$$(2)\wedge(5) \Rightarrow (1).$$

2° Ako je $b=\frac{2}{3}a$ i $c=\frac{1}{3}a$, uslovi (1) važe, ali je $b+c=a$, što se protivi pretpostavci da trougao ne degeneriše u duž.

Ako je sada $b=\frac{7}{9}a$ i $c=\frac{1}{9}a$, uslovi (1) takođe su ispunjeni. Međutim, sa dužina $a, b, c$, ovako izabranim, ne može se konstruisati trougao, jer je $b+c<a$.

Dakle, uslovi (1) nisu dovoljni.

**6.52.** Ako se sa $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ može konstruisati trougao $ABC$, dokazati da se sa

$$\beta\gamma=\sqrt[n]{a},\quad \gamma\alpha=\sqrt[n]{b},\quad \alpha\beta=\sqrt[n]{c}\qquad (n \text{ prirodan broj} >1)$$

takođe može konstruisati trougao $\alpha\beta\gamma$.

*Rešenje.* Ne umanjujući opštost, može se pretpostaviti da je

(1) $$0<a<b<c.$$

Kako su $a, b, c$ veličine strana trougla, za njih važi nejednakost

(2) $$c<a+b.$$

Relaciji (1) za trougao $\alpha\beta\gamma$ odgovara

(3) $$0<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}<\sqrt[n]{c}.$$

Zadatak će biti rešen ako dokažemo da iz važenja nejednakosti (2) i (3) izlazi

(4) $$\sqrt[n]{c}<\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}.$$

Pretpostavimo da nejednakost (4) nije tačna, već

(5) $$\sqrt[n]{c}\geq\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}.$$

Tada se, posle stepenovanja, dobija

(6) $$c\geq a+b+M \qquad (M \text{ jedan pozitivan broj}).$$

Kako je (6) u kontradikciji sa (2) za svako $a$ i $b$, dokazali smo da je nejednakost (4) tačna. Prema tome, ako je tačna nejednakost (2), isti će slučaj biti sa (4).

**6.53.** Ako je $n$ prirodan broj $>2$ i $a, b, c$ dužine strana pravouglog trougla ($c$ hipotenuza), dokazati da je $a^n+b^n<c^n$.

*Dokaz.* Kako je $a^2+b^2=c^2$, posle množenja sa $c^{n-2}$ dobija se

(1) $$a^2c^{n-2}+b^2c^{n-2}=c^n.$$

Pošto je $a<c$ i $b<c$, nalazi se

$$a^{n-2}<c^{n-2} \quad \text{i} \quad b^{n-2}<c^{n-2} \qquad (n>2).$$

Posle množenja redom sa $a^2$ i $b^2$ poslednje nejednakosti daju

$$a^n<a^2c^{n-2} \quad \text{i} \quad b^n<b^2c^{n-2} \qquad (n>2).$$

Sabiranjem ovih nejednakosti dobija se

$$a^n+b^n<a^2c^{n-2}+b^2c^{n-2} \qquad (n>2)$$

ili, na osnovu (1),

$$a^n+b^n<c^n \qquad (n>2),$$

što je trebalo dokazati.

**6.54.** Ako je $a>0$, odrediti oblasti u ravni Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema čije tačke $(x, y)$ zadovoljavaju uslov

$$\big||x+a|-|y-a|\big|<a.$$

*Uputstvo.* Mogućnim slučajevima

1° $x+a>0,\ y-a>0$;

2° $x+a>0,\ y-a<0$;

3° $x+a<0,\ y-a>0$;

4° $x+a<0,\ y-a<0$

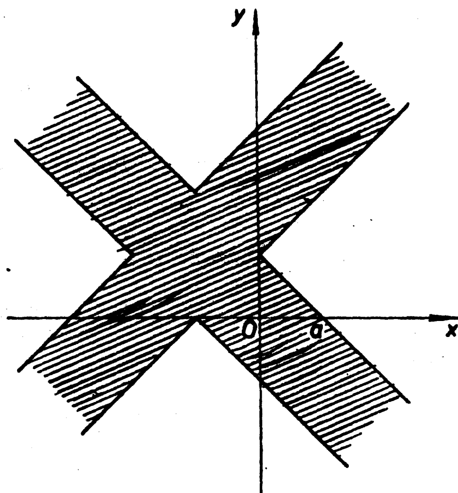
odgovaraju respektivno relacije:

1° $-a<x-y+2a<a$;

2° $-a<x+y<a$;

3° $-a<x+y<a$;

4° $-a<x-y+2a<a$.




*Rezultat.* Tražena oblast je šrafirana, s tim da se njene granične tačke isključuju.

**6.55.** Grafičkim putem rešiti nejednačinu $|x+1|+|y-2|\leqslant 1$.

**6.56.** Ako je $a+b=c+d$, koje još uslove treba da ispune realni brojevi $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ da bi polinom

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)+e^2$$

bio pozitivan za svako $x$ realno?

*Rešenje.* Kako se dati polinom može transformisati na oblik

$$[x^2-(a+b)x+(ab+cd)/2]^2+\frac{1}{4}[4e^2-(ab-cd)^2],$$

zaključujemo da brojevi $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ moraju zadovoljavati i nejednakost

$$4e^2-(ab-cd)^2\geqslant 0,$$

odnosno dvostruku nejednakost

$$-2<(ab-cd)/e<2 \quad \text{ako je } e\neq 0.$$

**6.57.** Dokazati nejednakost

(1) $$ab(a^2+b^2)\leqslant a^4+b^4.$$

*Rešenje.* Podimo od nejednakosti (1) napisane u obliku

(2) $$(a-b)^2(a^2+ab+b^2)\geqslant 0,$$

Kvadratna forma $a^2+ab+b^2$ je pozitivna za svako $a, b\neq 0$ pošto je identički

(3) $$a^2+ab+b^2=\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{(a+b)^2}{2}.$$

Prema tome, s obzirom na (2) i (3), nejednakost (1) važi za zvako $a, b\ (a\neq b)$. Znak jednakosti u (1) važi samo za $a=b$.

**6.58.** Dokazati nejednakost

$$(\sec^{2n}\alpha-1)(\operatorname{cosec}^{2n}\alpha-1)\geqslant(1+2+\cdots+n)^2.$$

**6.59.** Dokazati da nejednakosti

$$a\leqslant a\sin^4 x+b\cos^2 x\leqslant b \qquad (a<b)$$

važe za svako realno $x$.

Odrediti sve realne vrednosti $x$ za koje izraz $a\sin^2 x+b\cos^2 x$ uzima vrednosti $a$ odnosno $b$.

**6.60.** Dokazati nejednakost

$$\cos(\sin x)>\sin(\cos x) \qquad (0\leqslant x\leqslant\pi).$$

***Rešenje.*** Za $0<x<\pi$ je

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}<1{,}5<\frac{\pi}{2}$$

i odatle

$$0<\sin x<\frac{\pi}{2}-\cos x<\frac{\pi}{2}+1<\pi \Rightarrow \cos(\sin x)>\cos\left(\frac{\pi}{2}-\cos x\right)=\sin(\cos x) \quad (0<x<\pi).$$

**6.61.** Dokazati nejednakost

(1) $$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\geqslant abc(a+b+c).$$

***Rešenje 1.*** Ako je $a=b=0$, (1) se svodi na jednakost. Pretpostavimo da je $ab\neq 0$. Iz (1) dobijamo

(2) $$(b^2+c^2-bc)a^2-bc(b+c)a+b^2c^2\geqslant 0.$$

Da bi ova nejednakost važila za svako realno $a$, potrebno je i dovoljno da je

$$b^2+c^2-bc>0 \;\wedge\; b^2c^2(b+c)^2-4b^2c^2(b^2-bc+c^2)\leqslant 0.$$

Prva od ovih nejednakosti važi za svako $b\neq 0$ i $c$. Druga nejednakost svodi se na $-3b^2c^2(b-c)^2\leqslant 0$, pa i ona važi za svako $b\neq 0$ i $c$. Prema tome, nejednakost (2), tj. (1) je dokazana.

***Rešenje 2.*** Ako stavimo $bc=\alpha$, $ca=\beta$, $ab=\gamma$, tada (1) postaje

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\geqslant 0,$$

a ova nejednakost važi za svako $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

**6.62.** Date su nejednakosti:

$$\sin 2x>\sin x,\quad \cos 2x>\cos x,\quad \operatorname{tg} 2x>\operatorname{tg} x,\quad \operatorname{cotg} 2x>\operatorname{cotg} x.$$

Za koje vrednosti $x\,(0<x<2\pi)$ su ispunjene: 1° bar dve od datih nejednakosti; 2° bar tri od datih nejednakosti?

Da li postoji takvo $x$ za koje nijedna od ovih nejednakosti nije ispunjena?

**6.63.** Ako je $x_1x_2x_3\cdots x_n=1$ i $x_i>0\ (i=1,2,\ldots,n)$, dokazati nejednakost

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\cdots(1+x_n)\geqslant 2^n.$$

***Rešenje.*** Kako je $\frac{1}{\sqrt{x_i}}+\sqrt{x_i}\geqslant 2$ $(x_i>0;\ i=1, 2, \ldots, n)$, imamo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\sqrt{x_1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\sqrt{x_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}+\sqrt{x_n}\right)\geqslant 2^n,$$

tj.

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 2^n\sqrt{x_1 x_2\cdots x_n}=2^n.$$

Znak jednakosti važi ako i samo ako je $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$.

**6.64.** Ako su $a, b, c, d$ $(abcd=1)$ pozitivni brojevi, dokazati nejednakost

$$A=a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd\geqslant 10.$$

***Rešenje.*** Pođimo od nejednakosti

(1) $$x+\frac{1}{x}\geqslant 2\quad (x>0).$$

Pošto je $abcd=1$, imamo

(2) $$ab=\frac{1}{cd},\quad ac=\frac{1}{bd},\quad \text{itd.}$$

Dalje je

$$A=a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd$$

$$=ab\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+cd\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)+(ab+cd)+(ac+bd)+(ad+bc).$$

Izrazi u okruglim zagradama na osnovu (1) i (2) veći su ili jednaki 2, pa je $A\geqslant 2(ab+cd)+6$. Kako je $ab+cd\geqslant 2$, dobijamo $A\geqslant 10$, gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $a=b=c=d=1$.

Na koji se način ovaj zadatak može generalisati?

**6.65.** Ako je $b_1, b_2, \ldots, b_n$ proizvoljna permutacija pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dokazati da je

(1) $$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n.$$

***Rešenje.*** Aritmetička sredina od $n$ pozitivnih brojeva veća je ili jednaka odgovarajućoj geometrijskoj sredini, tj.

(2) $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}\right)\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}\right)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Iz uslova da je $b_1, b_2, \ldots, b_n$ neka permutacija brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ izlazi

$$\prod_{i=1}^{n}a_i=\prod_{i=1}^{n}b_i,\quad \text{tj.}\quad \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}\right)=1.$$

Prema tome, nejednakost (2) se svodi na (1), što je trebalo dokazati.

JEDNA ZANIMLJIVOST IZ TEORIJE BROJEVA

Broj 2456 $(=2^{11}+2^8+2^7+2^4+2^3)$ napisan u binarnom sistemu (čije su cifre 0 i 1) glasi:

100 110 011 000.

# 7. PROGRESIJE

**7.1.** Odrediti aritmetičku progresiju koja ima osobinu

$$a_m + a_n = a_{m+n} \quad (a_r \text{ je } r\text{-ti član progresije}).$$

*Rezultat.* $a, 2a, 3a, \ldots$

**7.2.** Dokazati da je $(-1)^{n+1}n$ zbir prvih $n$ članova reda $1-3+5-7+\cdots$.

**7.3.** Dokazati da je $\frac{1}{2}\{1-(2n+1)(-1)^n\}$ zbir prvih $n$ članova reda

$$1-2+3-4+\cdots.$$

**7.4.** Data je funkcija $f(x)=x^2-3x+2$.

1° Dokazati da

$$f(x+1)-f(x), \quad f(x+2)-f(x+1), \quad f(x+3)-f(x+2), \ldots$$

čine aritmetičku progresiju.

2° Koju vrednost treba dati promenjivoj $x$ da bi zbir pet prvih članova te progresije bio 60?

3° Koliko članova najmanje treba sabrati da bi zbir bio veći od 120?

**7.5.** Dokazati da brojevi $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ne mogu biti članovi jedne aritmetičke progresije.

*Dokaz.* Pretpostavimo da je suprotno tačno, tj. da su ti brojevi članovi jedne aritmetičke progresije i to neka je:

$\sqrt{2}$ onaj član čiji je rang $k$;

$\sqrt{3}$ onaj član čiji je rang $m$;

$\sqrt{5}$ onaj član čiji je rang $n$.

Tada je

(1) $$\sqrt{2}=a_1+(k-1)d, \quad \sqrt{3}=a_1+(m-1)d, \quad \sqrt{5}=a_1+(n-1)d$$

($a_1$ prvi član, $d$ razlika aritmetičke progresije).

Iz (1) dobija se

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}=(m-k)d, \quad \sqrt{5}-\sqrt{2}=(n-k)d.$$

Odavde jedno za drugim sleduje

$$(\sqrt{5}-\sqrt{2})/(\sqrt{3}-\sqrt{2})=(n-k)/(m-k),$$

$$(m-k)\sqrt{5}-(n-k)\sqrt{3}=(m-n)\sqrt{2},$$

$$\{5(m-k)^2+3(n-k)^2-2(m-n)^2\}/\{2(m-k)(n-k)\}=\sqrt{15}.$$

Napred učinjena pretpostavka dovela je do apsurda, jer je u poslednjoj relaciji na levoj strani racionalni broj, a na desnoj iracionalan.

Prema tome, indirektnim dokazom utvrdili smo da zaista $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ne mogu biti članovi jedne aritmetičke progresije.

**7.6.** Dokazati da brojevi $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ne mogu biti članovi jedne geometrijske progresije.

**7.7.** Data je aritmetička progresija

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \quad (a_{k+1}-a_k=d).$$

Dokazati da niz

$$S_1=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

$$S_2=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n},$$

$$S_3=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n},$$

$$\vdots$$

takođe čini aritmetičku progresiju i da je $S_{k+1}-S_k=n^2 d$.

**7.8.** Neka je $\underbrace{aa\ldots a}_{k}$ $(a=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ broj sa $k$ jednakih cifara.

Sumirati

$$S=a+aa+\cdots+\underbrace{aa\ldots a}_{n}.$$

***Rešenje.*** Kako je

$$\underbrace{aa\ldots a}_{k}=a(10^{k-1}+10^{k-2}+\cdots+1)=\frac{a}{9}(10^k-1),$$

biće

$$S=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{aa\cdots a}_{k}=\frac{a}{9}\sum_{k=1}^{n}(10^k-1)=\frac{a}{9}\left(10\cdot\frac{10^n-1}{9}-n\right),$$

odnosno

$$S=\frac{a}{81}(10^{n+1}-9n-10).$$

***Generalizacija.*** Sumirati $S$ ako se umesto $a$ stavi višecifreni broj.

**7.9.** Data je shema brojeva

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \vdots \end{matrix}$$

Dokazati da je zbir brojeva u svakoj vrsti jednak kvadratu neparnog broja.

**7.10.** Prirodni brojevi razvrstani su na sledeći način:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & 4 & & \\ & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

Dokazati da je $n^3+(n-1)^3$ zbir brojeva u $n$-toj vrsti.

**7.11.** Dato je $p$ aritmetičkih progresija:

| prvi član | 1 | 1 | 1 ... | 1 |
|---|---|---|---|---|
| razlika | 1 | 2 | 3 | $p$ |

Dokazati da je zbir $n$-tih članova ovih progresija

$$\frac{1}{2}\{(n-1)p^2+(n+1)p\}.$$

**7.12.** Dato je $p$ aritmetičkih progresija:

| prvi član | 1 | 2 | 3 ... | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| razlika | 1 | 3 | 5 | $2p-1$ |
| zbir $n$ prvih članova | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_p$ |

Dokazati formulu

$$\sum_{k=1}^{p} s_k=\frac{1}{2}np(np+1).$$

Generalisati.

**7.13.** Ako su brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ različiti od nule i ako obrazuju aritmetičku progresiju, dokazati jednakost

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

Obrnuto, ako brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n\geqslant 3)$ ispunjava uslov (1) za svako $n\geqslant 3$, dokazati da oni obrazuju aritmetičku progresiju.

*Rešenje.* Po pretpostavci je

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=d.$$

Ako je $d=0$, svi brojevi $a_k$ jednaki su međusobno i jednakost (1) je očevidna. Ako je $d\neq 0$, izraz na levoj strani relacije (1) možemo napisati u obliku

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}$$

$$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)\frac{1}{d}+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)\frac{1}{d}+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-2}}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)\frac{1}{d}+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)\frac{1}{d}$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{a_n-a_1}{a_1a_nd}=\frac{(n-1)d}{a_1a_nd}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

Dakle, ovim smo dokazali (1).

Pretpostavimo li sada da je

(2) $$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}\quad (n>3),$$

dokazaćemo da brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ obrazuju aritmetičku progresiju.

Ako je $n=3$, tada je

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{a_3+a_1}{a_1a_2a_3}=\frac{a_1+2d+a_1}{a_1a_2a_3}=\frac{2(a_1+d)}{a_1a_2a_3}=\frac{2a_2}{a_1a_2a_3}=\frac{2}{a_1a_3}$$

Odavde je

$$\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{a_1a_3}=\frac{1}{a_1a_3}-\frac{1}{a_2a_3}\Leftrightarrow\frac{a_3-a_2}{a_1a_2a_3}=\frac{a_2-a_1}{a_1a_2a_3}$$

Dakle,

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{2}{a_1a_3}\Leftrightarrow a_3-a_2=a_2-a_1.$$

Da bi gornje tvrđenje bilo dokazano, dovoljno je pokazati da iz (2) sleduje

$$a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}\quad (n>4),$$

Ako u (2) umesto $n$ stavimo $n-1$ i $n-2$, redom dobijamo

(3) $$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}=\frac{n-2}{a_1a_{n-1}},$$

(4) $$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-3}a_{n-2}}=\frac{n-3}{a_1a_{n-2}}.$$

Oduzimanjem (3) od (2) i (4) od (3), redom dobijamo

$$\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}-\frac{n-2}{a_1a_{n-1}}=\frac{n\,a_{n-1}-a_{n-1}-n\,a_n+2\,a_n}{a_1a_{n-1}a_n},$$

$$\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}=\frac{n-2}{a_1a_{n-1}}-\frac{n-3}{a_1a_{n-2}}=\frac{n\,a_{n-2}-2\,a_{n-2}-n\,a_{n-1}+3\,a_{n-1}}{a_1a_{n-2}a_{n-1}},$$

odnosno

$$\frac{1}{a_{n-1}a_n}-\frac{1}{a_1a_n}=\frac{(n-2)(a_{n-1}-a_n)}{a_1a_{n-1}a_n},$$

$$\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}-\frac{1}{a_1a_{n-2}}=\frac{(n-2)(a_{n-2}-a_{n-1})}{a_1a_{n-2}a_{n-1}}.$$

Odavde izlazi

$$a_1-a_{n-1}=(n-2)\,(a_{n-1}-a_n),$$

$$a_1-a_{n-1}=(n-2)\,(a_{n-2}-a_{n-1}),$$

što dovodi do jednakosti

$$a_{n-1}-a_n=a_{n-2}-a_{n-1},$$

koju je trebalo dokazati.

**7.14.** Dokazati identitet

(1) $$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

($a_1, a_2, \ldots, a_n$ različiti su od nule i obrazuju aritmetičku progresiju).

***Rešenje.*** Kako $a_1, a_2, \ldots, a_n$ čine aritmetičku progresiju, važe jednakosti

(2) $$a_{\nu+1}-a_\nu=d \qquad (\nu=1, 2, \ldots n-1;\ d \text{ fiksno}).$$

Na osnovu identiteta

$$\frac{1}{\sqrt{a_{\nu+1}}+\sqrt{a_\nu}}=\frac{\sqrt{a_{\nu+1}}-\sqrt{a_\nu}}{a_{\nu+1}-a_\nu}=\frac{\sqrt{a_{\nu+1}}-\sqrt{a_\nu}}{d},$$

dobija se

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{a_{\nu+1}}+\sqrt{a_\nu}}=\frac{1}{d}\sum_{\nu=1}^{n-1}(\sqrt{a_{\nu+1}}-\sqrt{a_\nu})$$

odnosno

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{a_{\nu+1}}+\sqrt{a_\nu}}=\frac{1}{d}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}).$$

Stavi li se ovde

$$\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}=\frac{(n-1)d}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}},$$

dolazi se do formule (1).

***Primedba.*** Da li važi obrnuto: (1) $\Rightarrow$ (2)?

**7.15.** Ako je $S_k$ zbir $k$ članova jedne geometrijske progresije, dokazati da je

$$S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2.$$

**7.16.** Neka je

$S_1$ zbir prvih $n_1$ članova aritmetičke progresije,

$S_2$ zbir prvih $n_2$ članova iste progresije,

$S_3$ zbir prvih $n_3$ članova iste progresije.

Dokazati jednakost

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_3)+\frac{S_2}{n_2}(n_3-n_1)+\frac{S_3}{n_3}(n_1-n_2)=0.$$

Generalisati.

**7.17.** Ako su $a^2, b^2, c^2$ $(a^2\neq b^2\neq c^2\neq a^2)$ tri uzastopna člana jedne aritmetičke progresije, dokazati da su

(1) $$\frac{1}{b+c},\quad \frac{1}{c+a},\quad \frac{1}{a+b}$$

takođe tri uzastopna člana jedne aritmetičke progresije.

***Rešenje.*** Kako su $a^2, b^2, c^2$ tri uzastopna člana jedne aritmetičke progresije, mora biti

$$b^2-a^2=c^2-b^2 \Leftrightarrow (b-a)(b+a)=(c+b)(c-b),$$

tj.

$$\frac{b-a}{c+b}=\frac{c-b}{b+a} \Leftrightarrow \frac{b-a}{(c+a)(c+b)}=\frac{c-b}{(b+a)(c+a)}.$$

Poslednja jednakost može se predstaviti u obliku

$$\frac{1}{c+a}-\frac{1}{c+b}=\frac{1}{b+a}-\frac{1}{c+a},$$

odakle izlazi da su brojevi (1) zaista tri uzastopna člana jedne aritmetičke progresije.

**7.18.** Date su dve aritmetičke progresije:

$$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25,\ 29,\ 33,\ 37, \ldots$$

$$4,\ 15,\ 26,\ 37, \ldots$$

Odrediti sve članove prve i druge progresije koji su međusobno jednaki.

*Rešenje.* Označimo članove prve progresije sa $a_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, a druge progresije sa $b_m$ $(m=1, 2, \ldots)$. Tada imamo $a_n = b_m$ odnosno $4n-3=11m-7$, što daje

$$11m=4(n+1). \qquad (1)$$

Prema tome, problem je da se reši Diofantova jednačina (1).

Iz (1) sleduje da je

$$\frac{1}{11}(n+1)=k \qquad (k \text{ prirodan broj}).$$

Odavde se dobijaju sledeće relacije koje određuju rangove jednakih članova progresija:

$$n=11k-1 \text{ i } m=4k \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Tako, na primer, za $k=1$ dobijamo $n=10$ i $m=4$, što znači da su deseti član prve progresije i četvrti član druge progresije međusobno jednaki.

PICARDOVA PORUKA SREDNJOŠKOLSKOJ OMLADINI

... Izgleda da smo mi u Francuskoj naročito osetljivi na duh, živost i blesak inteligencije, dok manje cenimo strpljivost i odvažnost u naporu. Međutim, ove dve osobine dominiraju u svakoj karijeri.

... Inteligencija u životu nije jedina snaga i ima mnogo primera gde je ona ostala neplodna. Koliko mladih inteligentnih ljudi, vrlo talentovanih, nisu dali ono što se od njih očekivalo! Dugo strpljenje je neophodno da bi učinilo plodnim najsrećnije darove; ono samo po sebi nije genije ali je ponekad talenat. Da bi se stvorilo jedno delo ili izvršila jedna akcija, treba imati istrajnu i neprekidnu volju.

Stalnim radom izgrađuju se dobri izgledi čiji plodovi pripadaju onima koji su ih dugo tražili: ova istina simbolizovana je u Njutnovom odgovoru koji je rekao da je zakone sveta otkrio na taj način što je o njima stalno mislio.

(Iz besede koju je É. Picard održao 30. jula 1898. učenicima čuvenog liceja Henri IV u Parizu).



KAKO SU NEKADA TRETIRANI MATEMATIČARI

U Justinijanovom kodeksu koji je objavljen 533. godine govori se o »zločincima i matematičarima i drugim sličnim«.

U ovom kodeksu dva člana glase:

»Ars autem mathematica damnabilis interdicta est« (pod pretnjom kazne zabranjena je takođe matematička veština);

»Nemo haruspicem consulat aut mathematicum« (neka niko ne traži savet od matematičara).

# 8. MATEMATIČKA INDUKCIJA

**8.1.** Ako je $n$ prirodan broj, dokazati da je $a^n - b^n$ deljivo sa $a-b$.

***Rešenje.*** Kako je

$$a^n - b^n = a^{n-1}(a-b) + b(a^{n-1} - b^{n-1}) \qquad (n>1),$$

iz pretpostavke $(a-b) \mid (a^{n-1} - b^{n-1})$ sleduje $(a-b) \mid (a^n - b^n)$. Za $n=1$ tvrđenje je tačno, pa na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da je ono tačno i za svako $n$.

**8.2.** Dokazati implikacije

$$a>b\geqslant 0 \;\Rightarrow\; a^n > b^n,$$

$$a>b\geqslant 0 \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b},$$

gde je $n$ prirodan broj.

**8.3.** Metodom indukcije dokazati

$$\binom{k}{1} + 2\binom{k}{2} + 3\binom{k}{3} + \cdots + k\binom{k}{k} = k\,2^{k-1}.$$

**8.4.** Dokazati da je broj $13^{2n}+6$ ($n$ nula ili prirodan broj) deljiv sa 7.

***Rešenje.*** Pretpostavimo li da je ovaj stav istinit za $n=k$, tj da je

(1) $$13^{2k} + 6 = 7\nu \qquad (\nu \text{ prirodan broj}),$$

tada je

$$13^{2k+2} + 6 = 169 \cdot 13^{2k} + 6 = 169(7\nu - 6) + 6 = 7(169\nu - 24 \cdot 6).$$

Prema tome, ako važi relacija (1), tada važi u relacija $7 \mid (13^{2k+2} + 6)$.

Kako je, pored toga, broj $13^{2n}+6$ deljiv sa 7 za $n=0$, zaključujemo da je on deljiv sa 7 za $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

**8.5.** Ako je $n$ prirodan broj, dokazati

$$54 \mid (2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2).$$

***Rešenje.*** Ako je $f(n) = 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$, tada je

$$f(n+1) - f(n) = 6(2^{2n} - 3n - 1).$$

Ako je $g(n) = 2^{2n} - 3n - 1$, tada je

$$g(n+1) - g(n) = 3(2^{2n} - 1).$$

Ako je $h(n) = 2^{2n} - 1$ dobija se

$$h(n+1) - h(n) = 3 \cdot 2^{2n}.$$

Budući da je $3 \mid h(1)$ i $3 \mid h(n+1)$ ako je $3 \mid h(n)$, dobija se $3 \mid h(n)$ za $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Kako je $9 \mid g(1)$ i $9 \mid g(n+1)$ kada je $9 \mid g(n)$, dolazi se do zaključka $9 \mid g(n)$ za $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

Kako je $54 \mid f(1)$ i $54 \mid f(n+1)$ kada je $54 \mid f(n)$, izlazi

$$54 \mid f(n) \text{ za } n \in \{1, 2, \dots\},$$

što je i trebalo dokazati.

$f(0)$ je takođe deljivo sa 54.

*Primedba.* Primeniti isto tako način dokazivanja upotrebljen u prethodnom zadatku.

**8.6.** Dokazati $3^{2n+2} - 8n - 9 \equiv 0 \pmod{64}$ ($n$ prirodan broj).

*Rešenje.* Pretpostavimo da je broj $f(n) = 3^{2n+2} - 8n - 9$ deljiv sa 64 ako je $n = k$, pa ispitajmo da li se iz ove pretpostavke zaključuje da je broj $f(n)$ deljiv sa 64 ako je $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 3^{2k+4} - 8k - 17 \\ &= 9 \cdot 3^{2k+2} - 8k - 17 \\ &= 9\,(3^{2k+2} - 8k - 9) + 64\,(k+1) \\ &= 9\,f(k) + 64\,(k+1). \end{aligned}$$

Na osnovu ovog zaključuje se da je broj $f(k+1)$ deljiv sa 64 ako je to slučaj sa $f(k)$.

Broj $f(n)$ deljiv je sa 64 za $n = 1$, pa prema gornjem $f(n)$ uživa istu osobinu za $n = 2, 3, \dots$, tj. za svako $n$, gde je $n$ prirodan broj.

Brojevi $f(0)$ i $f(-1)$ takođe su deljivi sa 64.

**8.7.** Dokazati nejednakost $2^n > n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

*Dokaz.* Označimo sa $P(n)$ ovo tvrđenje. $P(0)$ je tačno, jer je $2^0 > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$. Pretpostavimo da je tačno $P(n)$ za neko $n (\geqslant 0)$, tj.

(1) $$2^n > n.$$

Kako je

(2) $$2^n \geqslant 1 \qquad (n \geqslant 0),$$

posle sabiranja (1) i (2) imamo

$$2 \cdot 2^n > n + 1 \Leftrightarrow 2^{n+1} > n + 1 \qquad (\text{za neko } n \geqslant 0).$$

Prema tome, dokazali smo

$$P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

Ovim je induktivni dokaz završen.

**8.8.** Dokazati nejednakosti:

1° $2^n > n^2$ $\quad (n = 5, 6, 7, \dots)$;

2° $2^n > n^3$ $\quad (n = 10, 11, 12, \dots)$;

3° $3^n > n^4$ $\quad (n = 8, 9, 10, \dots)$.

*Dokaz.* 3° Za $n = 8$ zaista je $3^8 > 8^4$. Pretpostavimo da je istinita nejednakost

(1) $$3^k > k^4 \qquad (k \geqslant 8).$$

Ako je istinita i nejednakost

(2) $$3 > (k+1)^4 / k^4 \qquad (k \geqslant 8),$$

tada množenjem iz nejednakosti (1) i (2) izlazi

$$3^{k+1} > (k+1)^4 \qquad (k \geqslant 8).$$

Dokažimo sada nejednakost (2). Radi toga pođimo od identiteta

$$\frac{(k+1)^4}{k^4}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^4=1+\frac{4}{k}+\frac{6}{k^2}+\frac{4}{k^3}+\frac{1}{k^4}.$$

Kako je

$$\frac{4}{k}+\frac{6}{k^2}+\frac{4}{k^3}<1 \qquad (k=6, 7, \ldots),$$

biće

$$\frac{(k+1)^4}{k^4}<3 \qquad (k=6, 7, \ldots).$$

Prema tome, nejednakost (2) važi za $k \geq 6$.

Ovim je induktivni dokaz završen.

*Primedba.* Pri dokazivanju nejednakosti 1° i 2° treba prethodno dokazati nejednakosti

$$2>\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \quad (n=5, 6, \ldots); \qquad 2>\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \quad (n=10, 11, \ldots).$$

**8.9.** Metodom matematičke indukcije dokazati da je cifra broja $2^{2^n}$ ($n$ prirodan broj $\geqslant 2$) koja se nalazi na mestu jedinica uvek 6.

***Rešenje.*** Pretpostavimo da je

$$2^{2^n}=\nu \qquad (\nu \text{ broj čija je poslednja cifra } 6).$$

Ako se obe strane ove jednakosti dignu na kvadrat, dobija se

$$(2^{2^n})^2=\nu^2 \Leftrightarrow 2^{2^{n+1}}=\nu^2.$$

Kako se broj $\nu^2$ završava cifrom 6, ako je to slučaj sa brojem $\nu$, broj $2^{2^{n+1}}$ završava se sa 6 ako takvu osobinu ima $2^{2^n}$. Budući da povrh toga, broj $2^{2^n}$ ima ovu osobinu za $n=2$, zaključuje se da je krajnja cifra broja $2^{2^n}$ $(n>2)$ uvek 6.

**8.10.** Dokazati $9\,|\,(3\cdot 4^{n+1}+10^{n-1}-4)$ ($n$ prirodan broj).

***Rešenje.*** Za $n=1$ ovaj broj deljiv je sa 9. Pretpostavimo da je dati broj deljiv sa 9 za neko $n$, tj.

$$3\cdot 4^{n+1}+10^{n-1}-4=9\nu \qquad (\nu \text{ prirodan broj}).$$

Na osnovu ove hipoteze je

$$3\cdot 4^{n+2}+10^n-4=36\nu+12+6\cdot 10^{n-1}.$$

Broj $10^{n-1}+2$ deljiv je sa 3 ako je $n$ proizvoljan prirodan broj. Za $n=1$ ovo tvrđenje je tačno. Učinimo li hipotezu da je broj $10^{n-1}+2$ deljiv sa 3 za neko $n$ i obrazujemo li $10^n+2$, tj. $10\cdot 10^{n-1}+2$, tj. $10(10^{n-1}+2)-18$, zaključujemo da je broj $10^{n-1}+2$ deljiv sa 3 za svaki prirodan broj $n$.

Budući da je broj

$$36\nu+6(10^{n-1}+2)$$

deljiv sa 9 ako je to slučaj sa brojem

$$3\cdot 4^{n+1}+10^{n-1}-4$$

i da je povrh toga poslednji broj deljiv sa 9 za $n=1$, zaključujemo da je broj $3\cdot 4^{n+1}+10^{n-1}-4$ deljiv sa 9 za svaki prirodan broj $n$.

**8.11.** Dokazati da je broj $f(n)=3^{2n+1}+2^{n+2}$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) deljiv sa 7.

*Rešenje.* $3^{2n+1}=3\cdot 9^n=3(2+7)^n=3\cdot 2^n+7k$ ($k$ prirodan broj),

$2^{n+2}=4\cdot 2^n$,

$f(n)=3\cdot 2^n+4\cdot 2^n+7k=7\cdot 2^n+7k \Rightarrow 7\mid f(n)$.

Broj $f(0)$ deljiv je takođe sa 7.

**8.12.** Matematičkom indukcijom ili na koji drugi način dokazati da je

$$133\mid(11^{n+2}+12^{2n+1}) \qquad (n \text{ prirodan broj ili nula}).$$

**8.13.** Dokazati $8\mid(11\cdot 3^n+3\cdot 7^n-6)$ ($n$ nula ili prirodan broj).

**8.14.** Numeričke vrednosti polinoma $P(x)=x^2+x+41$ za $x=0, 1, 2, \ldots, 39$ su prosti brojevi. Da li se na osnovu toga može zaključiti da su: $P(40), P(41), \ldots$ prosti brojevi?

*Odgovor.* Ne. $P(40)=41^2$ nije prost broj.

**8.15.** Ako je $n$ nula ili prirodan broj, dokazati da je

$$A_n=\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

prirodan broj.

*Dokaz.* Kako je

$$A_{n-1}+A_{n-2}=\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$
$$+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

dobija se

$$A_{n-1}+A_{n-2}=\frac{5-\sqrt{5}}{10}\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

Uzimajući u obzir da je

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2, \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

nalazi se

(1) $$A_{n-1}+A_{n-2}=A_n.$$

Za $n=0$ i $n=1$ imamo redom $A_0=1$, $A_1=1$.

Pretpostavimo da je broj $A_n$ prirodan kada je $n=k-1$ i $n=k-2$ ($k$ prirodan broj $>2$). Tada je, na osnovu (1), i $A_k$ prirodan broj.

$A_2$ je prirodan broj, jer su takvi brojevi $A_0$ i $A_1$. Broj $A_3$ je prirodan, budući da su $A_1$ i $A_2$ prirodni brojevi, itd.

*Napomena.* Brojevi

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, \text{ tj. } 1, 1, 2, 3, \ldots$$

čine Fibonacciev niz.

**8.16.** Dokazati identitet

(1) $$4\sum_{r=1}^{n}\left(3^{r-1}\sin^3\frac{\theta}{3^r}\right)=3^n\sin\frac{\theta}{3^n}-\sin\theta.$$

***Dokaz.*** Za $n=1$ tvrđenje je tačno, jer je

$$4\sin^3\frac{\theta}{3}=3\sin\frac{\theta}{3}-\sin\theta,$$

što sleduje iz formule

(2) $$\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a.$$

Pretpostavimo sada da je relacija (1) tačna za $n=k$, tj.

(3) $$4\sum_{r=1}^{k}\left(3^{r-1}\sin^3\frac{\theta}{3^r}\right)=3^k\sin\frac{\theta}{3^k}-\sin\theta.$$

Na osnovu (3) izlazi

$$4\sum_{r=1}^{k+1}\left(3^{r-1}\sin^3\frac{\theta}{3^r}\right)=\left(3^k\sin\frac{\theta}{3^k}-\sin\theta\right)+4\cdot 3^k\sin^3\frac{\theta}{3^{k+1}}$$

$$=3^k\left(\sin\frac{\theta}{3^k}+4\sin^3\frac{\theta}{3^{k+1}}\right)-\sin\theta.$$

Na osnovu (2) je

$$\sin\frac{\theta}{3^k}+4\sin^3\frac{\theta}{3^{k+1}}=3\sin\frac{\theta}{3^{k+1}}.$$

Dakle, ako je relacija (1) tačna za $n=k$, ona je tačna i za $n=k+1$. Prema tome, matematičkom indukcijom dokazali smo (1).

**8.17.** Aritmetička sredina brojeva $a$ i $b$ je $u_1$, aritmetička sredina brojeva $b$ i $u_1$ je $u_2$, aritmetička sredina brojeva $u_1$ i $u_2$ je $u_3$, itd.

Dokazati

(1) $$u_n=\frac{1}{3}\left\{\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]a+\left[2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]b\right\}.$$

***Dokaz.*** Kako je $u_k=\frac{1}{2}(u_{k-1}+u_{k-2})$, uvedemo li oznake $u_{-1}=a$, $u_0=b$, tada je

$$u_1=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}b\right)=\frac{a+b}{2}=\frac{u_{-1}+u_0}{2},$$

$$u_2=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}a+\frac{9}{4}b\right)=\frac{a}{4}+\frac{3}{4}b=\frac{b+\frac{a+b}{2}}{2}=\frac{u_0+u_1}{2}.$$

Prema tome, formula (1) je tačna za $n=1$ i $n=2$. Pretpostavimo sada da je formula tačna za $n=k-1$ i $n=k-2$.

Prema definiciji je

$$u_k=\frac{u_{k-1}+u_{k-2}}{2}=\frac{1}{6}\left\{\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}+1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}\right]a\right.$$

$$\left.+\left[2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}+2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}\right]b\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right]a+\left[2+\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right]b\right\}.$$

Dakle, formula (1) je tačna za $n=k$ ako je tačna za $n=k-1$ i $n=k-2$. Ovim je induktivni dokaz završen.

**8.18.** 1° Dokazati Bernoullievu teoremu:

Ako jedna aritmetička i jedna geometrijska progresija imaju jednaka prva dva člana $a_1$ i $a_2$ $(a_1 \neq a_2;\ a_1, a_2 > 0)$, svaki sledeći član aritmetičke progresije manji je od odgovarajućeg člana geometrijske progresije.

2° Dokazati takođe teoremu:

Ako jedna aritmetička i jedna geometrijska progresija imaju jednaka prva dva člana: $a_1$ i $a_2$ $(a_1 \neq a_2;\ a_1, a_2 < 0)$, svaki sledeći član aritmetičke progresije veći je od odgovarajućeg člana geometrijske progresije.

3° Iskazati napred navedene teoreme u obliku jedne jedine teoreme.

*Dokaz.* 1° Posmatrajmo progresije:

$$a_1,\ a_2,\ a_1+2(a_2-a_1),\ \ldots,\ a_1+n(a_2-a_1);$$

$$a_1,\ a_2,\ a_1(a_2/a_1)^2,\ \ldots,\ a_1(a_2/a_1)^n.$$

Razlika trećih članova je

$$a_1(a_2/a_1)^2-a_1-2(a_2-a_1),\ \text{tj.}\ (a_2-a_1)^2/a_1,$$

odakle se zaključuje da teorema važi za $n=2$.

Pretpostavimo sada da je ova teovema tačna za $n=k(>2)$, tj.

(1) $$a_1(a_2/a_1)^k > a_1+k(a_2-a_1).$$

Uz učinjene pretpostavke u zadatku je

(2) $$(a_2/a_1)^k(a_2-a_1) > a_2-a_1.$$

Zaista ako je $a_2 > a_1$, tada je

$$(a_2/a_1)^k > 1 \ \text{i}\ a_2-a_1 > 0,$$

pa je nejednakost tačna.

Ako je $a_2 < a_1$, tada je

$$(a_2/a_1)^k < 1 \ \text{i}\ a_2-a_1 < 0,$$

na osnovu čega se zaključuje da je nejednakost (2) opet u važnosti.

Iz (1) i (2), posle sabiranja, dobija se:

$$a_2(a_2/a_1)^k > a_1+(k+1)(a_2-a_1),$$

odnosno

$$a_1(a_2/a_1)(a_2/a_1)^k > a_1+(k+1)(a_2-a_1)$$

i najzad

$$a_1(a_2/a_1)^{k+1} > a_1+(k+1)(a_2-a_1).$$

Ova nejednakost kazuje da je teorema tačna za $n=k+1$ ako je tačna za $n=k$.

2° I ova teorema može se dokazati indukcijom.

U ovom slučaju umesto (1) i (2) imamo

(1′) $$a_1(a_2/a_1)^k < a_1+k(a_2-a_1)$$

(2′) $$(a_2/a_1)^k(a_2-a_1) < a_2-a_1 \qquad (k>2).$$

Pokazaćemo da je nejednakost (2′) tačna uz naše pretpostavke o parametrima $a_1, a_2$ i $k$ dok dokaz same teoreme nećemo iznositi.

Ako je $a_1 > a_2$, tada je $(a_2/a_1)^k > 1$ i $a_2-a_1 < 0$, na osnovu čega se zaključuje da je nejednakost (2′) tačna.

Ako je $a_1 < a_2$, tada je $(a_2/a_1)^k < 1$, $a_2-a_1 > 0$, čime je ponovo potvrđena nejednakost (2′).

**8.19.** Ako je $p$ prost broj i $a$ prirodan broj, dokazati sledeću kongruenciju (Fermatova teorema)

(1) $$a^p - a \equiv 0 \pmod{p}.$$

*Dokaz.* Za $a=1$ kongruencija (1) je tačna. Pretpostavimo da (1) važi za $a=n\,(>1)$. Pođimo od jednakosti

(2) $$(n+1)^p = n^p + \binom{p}{1} n^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1} n + 1.$$

Binomni koeficijenti $\binom{p}{k}$ $(k=1, 2, 3, \ldots, p-1)$ su celi brojevi i deljivi sa $p$, pa dobijamo kongruenciju

$$(n+1)^p \equiv n^p + 1 \pmod{p}.$$

Odavde sleduje

(3) $$(n+1)^p - (n+1) \equiv n^p - n \pmod{p}.$$

Kako, prema pretpostavci, kongruencija (1) važi za $a=n$, iz (3) sleduje da ona važi i za $a=n+1$. Prema tome, kogruencija (1) je dokazana metodom matematičke indukcije.

**8.20.** Dokazati nejednakost

(1) $$p!\,(2q)! \leqslant 2^{2q}\, q!\,(p+q)!,$$

gde su $p$ i $q$ nenegativni celi brojevi.

*Dokaz.* Za $q=0$ relacija (1) postaje $p! < (p+1)!$ i ona je tačna.

Pretpostavimo da je relacija (1) tačna za neko $q$. Pomnožimo levu i desnu stranu relacije (1) sa $(2q+1)(2q+2)$. Tada se dobija

$$p!\,(2q+2)! < 2^{2q}\, q!\,(p+q)!\,(2q+1)(2q+2).$$

Ako je

(2) $$2^{2q}\, q!\,(p+q)!\,(2q+1)(2q+2) < 2^{2q+2}(q+1)!\,(p+q+1)!,$$

tada je relacija (1) tačna.

Relacija (2) ekvivalentna je relaciji

$$(2q+1)(2q+2) < 4(q+1)(p+q+1),$$

tj.

$$0 < 2p+1.$$

Poslednja nejednakost je tačna za svako $p$ (nenegativan broj).

Dakle, nejednakost (1) je tačna ako su $p$ i $q$ nenegativni celi brojevi.

**8.21.** Dokazati

$$\prod_{k=1}^{r} (6\nu_k + 5) \equiv \begin{cases} 5 \pmod{6} & (r \text{ neparno}), \\ 1 \pmod{6} & (r \text{ parno}) \end{cases}$$

($\nu_k$ prirodni brojevi).

**8.22.** Ako su $a$ i $b$ realni brojevi, dokazati da je

(1) $$|\sin(a+b)| \leqslant |\sin a| + |\sin b|$$

i da za svaki prirodan broj $k$ važi

(2) $$|\sin kx| \leqslant k\,|\sin x|.$$

*Rešenje.* Kako je $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ i kako je $|\cos a| \leqslant 1$ i $|\cos b| \leqslant 1$ dobija se

$$|\sin(a+b)| = |\sin a \cos b + \cos a \sin b| \leqslant |\sin a| + |\sin b|,$$

te je relacija (1) dokazana.

Relacija (2) dokazuje se metodom totalne indukcije. Ona je tačna za $k=1$. Pretpostavimo da je relacija (2) tačna za za $n=k$. Kako je, na osnovu (1) i induktivne pretpostavke

$$|\sin(n+1)x| \leqslant |\sin nx| + |\sin x| \leqslant n\,|\sin x| + |\sin x|,$$

zaključujemo da je relacija (2) tačna za svaki prirodan broj $k$.

**8.23.** U ravni je povučeno $n$ pravih pod uslovom da nema nijednog para paralelnih pravih, niti skupa od tri prave koje se seku u jednoj tački.

Matematičkom indukcijom dokazati da je ravan, navedenom mrežom pravih podeljena na $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ oblasti.

*Rešenje.* Označimo sa $B_n$ broj oblasti koje se dobijaju od $n$ pravih. Ako se skupu $n$ pravih, koje zadovoljavaju postavljene uslove, pridruži još jedna prava tako da ovih $n+1$ pravih ispune postavljene uslove, tada se broj $B_n$ povećava za $n+1$. Prema tome $B_{n+1}=B_n+n+1$. Na osnovu ove jednakosti zaključujemo da, ako je za neki prirodan broj $B_n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$, onda je $B_{n+1}=\frac{1}{2}((n+1)^2+(n+1)+2)$. Pošto je $B_1=2$, zaključujemo da je formula $B_n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ tačna za svaki prirodan broj $n$.

**8.24.** Dokazati nejednakost

$$(1) \qquad n!\leqslant\left(\frac{n}{2}\right)^n \qquad (n\geqslant 6).$$

*Dokaz.* Neka je nejednakost (1) tačna za $n>6$. Tada je takođe

$$n!(n+1)<(n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

Nejednakost (1) dokazaćemo indukcijom ako pokažemo da je

$$(2) \qquad (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)<\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$$

Pretpostavimo da nejednakost (2) nije tačna, tj. da je za neko $n>6$

$$(3) \qquad (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n>\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$$

Tada je

$$(3) \Leftrightarrow n^n>\frac{1}{2}(n+1)^n \Leftrightarrow 2n^n>n^n+\binom{n}{1}n^{n-1}+\binom{n}{2}n^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}.$$

Kako zadnja nejednakost ne važi ni za jedno $n>6$, (2) je tačno za svako $n>6$. Nejednakost (1) je tačna za $n=6$, pa je na osnovu prethodnog tačna i za svako $n>6$.

**8.25.** Dokazati nejednakost

$$(1) \qquad 2^n>1+n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \qquad (n \text{ prirodan broj}>2).$$

*Dokaz.* Za $n=3$ nejednakost (1) je tačna.

Pretpostavimo da je (1) tačno za neko $n>3$. Tada je i

$$2^{n+1}>2+n\cdot 2^{\frac{n+1}{2}}.$$

Ako dokažemo da za $n>3$ važi

$$(2) \qquad 2+n\,2^{\frac{n+1}{2}}>1+(n+1)\,2^{\frac{n}{2}},$$

tada je induktivni dokaz završen. Kako je

$$(2) \Leftrightarrow 1>2^{\frac{n}{2}}[(n+1)-n\sqrt{2}] \Leftrightarrow 1>2^{\frac{n}{2}}[1-(\sqrt{2}-1)n]$$

i kako poslednja nejednakost važi za svaki prirodan broj $>3$, induktivan dokaz je završen.

Nejednakost (1) važi i za $n=2$.

# 9. KOMBINATORIKA

**9.1.** Ako je osnovna (glavna) permutacija

$$1, 2, 3, \ldots, n,$$

odrediti broj inverzija u permutaciji

$$n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1.$$

*Rezultat.* Broj inverzija iznosi

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\binom{n}{2}.$$

**9.2.** Ako je glavna permutacija

$$1, 2, 3, \ldots, 2n,$$

odrediti broj inverzija u permutacijama:

1° $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, \ldots, 2n;$

2° $2, 4, 6, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n-1.$

*Rezultat.* 1° $\binom{n}{2}$; 2° $\binom{n+1}{2}$.

**9.3.** U prostoru je dato $n\,(\geqslant 4)$ tačaka pod uslovom da nikoje četiri ne leže u jednoj ravni. Ako se od ovih tačaka uzmu po tri, one određuju $N$ ravni.

Da li postoji takvo $n$ da broj pravih koje se dobijaju međusobnim presekom tih $N$ ravni bude jednak broju pravih koje su određene sa po dve od datih tačaka?

Da li je potreban i uslov da tri tačke ne leže na jednoj pravoj?

**9.4.** Dokazati identitete:

$$\binom{-1}{k}=(-1)^k, \qquad \binom{-2}{k}=(-1)^k(1+k), \qquad \binom{-n}{k}=(-1)^k\binom{k+n-1}{k},$$

$$\binom{-1/2}{k}=(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}=(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}=(-1)^k\,2^{-2k}\binom{2k}{k}.$$

**9.5.** Dokazati

$$\binom{-1}{k}+\binom{-2}{k}+\binom{-3}{k}+\cdots+\binom{-n}{k}+\binom{-n}{k+1}=0.$$

**9.6.** Proveriti identitete:

$$\binom{n-1}{k}+2\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-2}=\binom{n+1}{k}; \qquad n\binom{2n}{n}=(n+1)\binom{2n}{n+1}.$$

**9.7.** Ako je $V_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1)$, proveriti identitet

$$V_{n+2}^r=V_n^r+2\,r\,V_n^{r-1}+r\,(r-1)\,V_n^{r-2}.$$

**9.8.** Ako je $(a)_r = a(a+1)(a+2)\cdots(a+r-1)$, dokazati formule:

$$(a)_{n-1}(a-1)=(a-1)_n;$$

$$(a)_{n-r}(1-a-n)_r=(-1)^r(a)_n;$$

$$n!/(n-s)!=(-1)^s(-n)_s.$$

**9.9.** Dokazati da elementi Pascalovog trougla

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 1 | 1 | | | | |
| 1 | 2 | **1** | | | |
| 1 | 3 | **3** | 1 | | |
| 1 | 4 | **6** | **4** | 1 | |
| 1 | 5 | 10 | **10** | 5 | 1 |
| . | | | | | |
| . | | | | | |
| . | | | | | |

imaju osobinu:

Razlika kvadrata ma koja dva uzastopna broja koji leže na trećoj hipotenuzi (elementi odštampani polucrno) je kub jednog prirodnog broja.

*Rešenje.* Posmatrajmo dve uzastopne vrste Pascalovog trougla

$$\begin{matrix} 1 & \binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \cdots & \binom{k}{k-2} & \binom{k}{k-1} & 1 & \\ 1 & \binom{k+1}{1} & \binom{k+1}{2} & \cdots & \binom{k+1}{k-2} & \binom{k+1}{k-1} & \binom{k+1}{k} & 1. \end{matrix}$$

Razlika kvadrata elemenata treće hipotenuze je

$$\binom{k+1}{k-1}^2-\binom{k}{k-2}^2=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{k(k-1)}{2}\right]^2=k^3.$$

Ovim je dokaz završen.

**9.10.** Dokazati formulu

$$\binom{n-p}{q}\binom{n}{p}=\binom{n-q}{p}\binom{n}{q} \qquad (p,\ q \text{ nenegativni celi brojevi}).$$

**9.11.** Ako je $n$ prirodan broj, dokazati da je broj $(2n)!/(n!\,2^n)$ prirodan

**9.12.** Dokazati da je

(1) $$(2n-2)!/\{n!\,(n-1)!\} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

prirodan broj.

*Dokaz.* Brojevi

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} \quad \text{i} \quad \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-2)!} \qquad (n=2,3,\ldots)$$

su binomni koeficijenti i prema tome prirodni brojevi.

Budući da je

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}-\frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}=\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!},$$

konstatujemo da je $(2n-2)!/\{n!(n-1)!\}$ prirodan broj, jer je on razlika dva prirodna broja, odnosno dva binomna koeficijenta.

Za $n=1$ broj (1) jednak je 1.

**9.13.** Koliko se različitih brojeva u dekadnom sistemu može napisati pod uslovom da ovi brojevi budu sa najviše $n$ cifara?

*Odgovor.* $10^n$.

**9.14.** Na koliko se načina mogu razmestiti $n$ lica na $n$ odnosno $n+m$ stolica razmeštenih oko okruglog stola ako smatramo da su razmeštanja različita samo tada kada je međusobni raspored lica različit?

*Odgovor.* $(n-1)!$ odnosno $\frac{(n+m-1)!}{m!}$.

**9.15.** Na koliko se načina $n$ lica mogu rasporediti na $m$ stolica, gde je $m>n$?

*Rešenje.* Ako su stolice numerisane, svakom razmeštaju odgovara jedna numeracija od $n$ lica sa $n$ od ukupno $m$ brojeva. Stoga je traženi broj rasporeda $\frac{m!}{(m-n)!}$.

**9.16.** U kojim su vrstama Paskalovog trougla svi brojevi neparni?

*Rezultat.* Brojevi vrsta: $1, 3, 7, 15, \ldots, 2^n-1, \ldots$

**9.17.** U jednoj kutiji nalazi se 100 raznobojnih kuglica, i to: 28 crvenih, 20 zelenih, 12 žutih, 20 plavih, 10 belih i 10 crnih. Koliki je najmanji broj kuglica koje treba uzeti iz kutije da bi se sigurno izvuklo 15 kuglica jedne boje?

*Rezultat.* 75 kuglica.

**9.18.** U sobi se nalazi nekoliko ljudi koji znaju bar jedan od tri jezika. Šestoro znaju engleski, šestoro nemački, sedmoro francuski, četvoro engleski i nemački, troje nemački i francuski, dvoje francuski i engleski. Jedan čovek zna sva tri jezika. Koliko ljudi ima u sobi? Koliko njih zna samo engleski?

*Rešenje.* Podatke navedene u zadatku napisaćemo u obliku jedne tabele:

| E | N | F | EN | NF | FE | ENF |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 6 | 7 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Ako iz sobe izađe čovek koji zna sva tri jezika, dobijamo sledeću tabelu:

| E | N | F | EN | NF | FE | ENF |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 6 | 3 | 2 | 1 | 0 |

Ako sada iz sobe izađu 3 čoveka koji istovremeno znaju engleski i nemački, broj ljudi koji govore ostale parove jezika ostaje neizmenjen, pošto više niko u sobi ne govori sva tri jezika. Gornja tabela postaje:

| E | N | F | EN | NF | FE | ENF |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 6 | 0 | 2 | 1 | 0 |

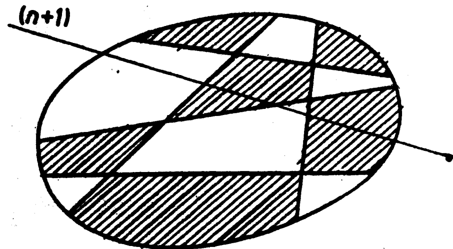
Neka sada izađu dva čoveka koji znaju nemački i francuski i jedan koji zna francuski i engleski. Ostaje:

| E | N | F | EN | NF | FE | ENF |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Kao što se vidi, ostao je jedan čovek koji zna samo engleski. S obzirom da su u sobi ostala još 3 čoveka koji znaju samo francuski, a izašlo ih je 7, zaključujemo da ih je u početku bilo 11.

**9.19.** Dokazati da se ravan, razdeljena na delove sa $n$ pravih, može obojiti belom i crnom bojom, tako da dva dela koji imaju zajedničku stranu budu obojeni različitim bojama (ovako bojenje naziva se pravilnim).

***Rešenje.*** Ako je ravan podeljena samo jednom pravom, ona se može obojiti prema uslovima zadatka. Dovoljno je jednu poluravan obojiti jednom bojom, a drugu drugom bojom.



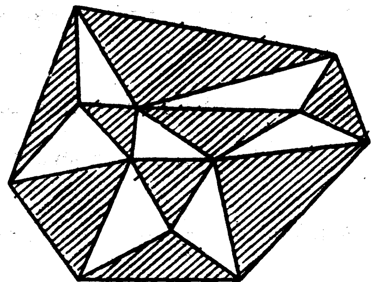

Pretpostavimo da smo obojili ravan, podeljenu sa $n$ pravih, prema uslovima zadatka. Ako se povuče još jedna prava, dokazaćemo da se i onda ravan može obojiti prema uslovima zadatka. Nova prava deli ravan na dve poluravni. Da bi smo ravan obojili prema uslovu, dovoljno je da u jednoj poluravni izmenjamo sve boje, tj. sve što je bilo obojeno crnom bojom obojimo belom i obratno. Prema tome, iz uslova da smo pravilno obojili ravan podeljenu sa $n$ pravih izlazi da je možemo obojiti i u slučaju kada je podeljena sa $n+1$ pravih. Primenjujući princip matematičke indukcije utvrdili smo da je iskaz dat u zadatku tačan.

**9.20.** Na slici je prikazan šestougao podeljen na bele i crne trougle, tako da:

(a) ili dva troula imaju zajedničku stranicu, ili imaju zajedničko teme, ili nemaju zajedničkih tačaka;

(b) svaka stranica šestougla istovremeno je stranica crnog trougla.

Dokazati da se desetougao ne može podeliti na ovaj način.



***Rešenje.*** Ako je takva podela mogućna, broj stranica crnih trouglova biće za 10 veći od ukupnog broja stranica belih trouglova. Međutim, pošto broj 10 nije deljiv sa 3 došli smo do protivurečnosti. Prema tome desetougao se ne može podeliti na ovaj način.

# 10. SUMIRANJE

**10.1.** Skup prirodnih brojeva podeljen je u ovakve podskupove:

$$\begin{array}{l} 1; \\ 2,\ 3,\ 4; \\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9; \\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16; \\ \vdots \end{array}$$

Odrediti zbir $S_n$ brojeva u $n$-tom podskupu kao i $\sum_{k=1}^{n} S_k$.

*Rešenje.* U $n$-tom podskupu prvi broj je $(n-1)^2+1$, a poslednji $n^2$. U tom podskupu ima $n^2-(n-1)^2=2n-1$ brojeva.

Zbir aritmetičke progresije je

$$S_n=(2n-1)(n^2-n+1).$$

Prema tome, imamo

$$\sum_{k=1}^{n} S_k=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(k^2-k+1)=\sum_{k=1}^{n}(2k^3-3k^2+3k-1).$$

Kako je

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2},$$

dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n} S_k=\frac{n^2(n^2+1)^2}{2}.$$

**10.2.** Skup prirodnih brojeva razbiti u sledeće podskupove:

$$\{1\};\ \{2,4\};\ \{3,5,7\};\ \{6,8,10,12\};\ \{9,11,13,15,17\};\ \ldots$$

Izračunati zbir svih elemenata u $n$-tom podskupu.

**10.3.** Prirodni brojevi razvrstani su u sledeće podskupove:

$$\{1\};\ \{2,3\};\ \{4,5,6\};\ \ldots$$

gde $n$-ti podskup sadrži $n$ brojeva.

Odrediti zbir $S_n$ brojeva u $n$-tom podskupu kao i $\sum_{k=1}^{n} S_k$.

*Rezultat.* $S_n=\frac{1}{2}n(n^2+1)$, $\quad S_1+S_2+\cdots+S_n=\frac{1}{2}n(n+1)(n^2+n+2)$.

**10.4** Skup prirodnih brojeva podeljen je u sledeće podskupove:

$\{(1, 2), (3)\}$, $\quad\{(4, 5, 6), (7, 8)\}$, $\quad\{(9, 10, 11, 12), (13, 14, 15)\}$,

$\{(16, 17, 18, 19, 20), (21, 22, 23, 24)\}$, ...

Svaki podskup podeljen je u dva nova podskupa koji su izdvojeni u okruglim zagradama po zakonu koji je lako uočiti. Ovi poslednji podskupovi imaju osobinu da je zbir elemenata jednog podskupa jednak zbiru elemenata drugog podskupa. Dokazati ovu osobinu.

*Dokaz.* Formirajmo $k$-ti podskup sa njegova dva podskupa:

$$\{(k^2, k^2+1, k^2+2, \ldots, k^2+k), (k^2+k+1, k^2+k+2, \ldots, k^2+2k)\}.$$

Prvi podskup ima $k+1$ elemenata, a drugi $k$. Ako označimo sa $S_1$ zbir elemenata prvog podskupa i sa $S_2$ zbir drugog, dobijamo:

$$S_1 = (k^2)+(k^2+1)+(k^2+2)+\cdots+(k^2+k) = (k+1)k^2 + \frac{k(k+1)}{2},$$

$$S_2 = (k^2+k+1)+(k^2+k+2)+\cdots+(k^2+2k) = k^3+k^2+\frac{k(k+1)}{2}.$$

Odavde neposredno proizilazi da je $S_1 = S_2$, što je i trebalo dokazati.

**10.5.** Skup brojeva $A_k = a+(k-1)d$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ podeljen je u sledeće podskupove:

$$a, \quad a+d;$$

$$a+2d, \quad a+3d, \quad a+4d, \quad a+5d;$$

$$a+5d, \quad a+7d, \quad a+8d, \quad a+9d, \quad a+10d, \quad a+11d;$$

$$\vdots$$

gde svaki podskup ima dva člana više od prethodnog.

Ako je $S_n$ zbir svih članova u $n$-tom podskupu, odrediti $S_n$, $\sum_{k=1}^{n} S_k$, $\sum_{k=1}^{n} S_k^2$.

**10.6.** Sumirati: 1° $\sum_{k=1}^{n} \log(1+1/k)$; 2° $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1} a_k$.

*Rezultat.* 1° $\log(n+1)$; 2° $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_k$.

**10.7.** Odrediti $u_k$ i $\sum_{k=1}^{n} u_k$ ako je

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 3+5, \quad u_3 = 7+9+11, \quad u_4 = 13+15+17+19, \ldots$$

*Rezultat.* $u_k = k^3$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$.

**10.8.** Sumirati $ab+(a+p)(b+q)+\cdots+[a+(n-1)p][b+(n-1)q]$.

*Rezultat.* $\frac{n}{6}[2pqn^2+3(pb+qa-pq)n+pq-3(pb+qa)+6ab]$.

**10.9.** Dokazati

$$a[a+(n-1)d]+(a+d)[a+(n-2)d]+\cdots+[a+(n-1)d]a$$
$$=adn^2+a(a-d)n+\binom{n}{3}d^2.$$

**10.10.** Sumirati $n$ prvih članova u razvoju

$$mn+(m-1)(n-1)+(m-2)(n-2)+\cdots$$

*Rezultat.* $\frac{1}{6}n(n+1)(3m-n+1)$.

**10.11.** Dokazati formule:

$$\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k+1}=\frac{1-(-1)^{\nu}}{2}; \qquad \sum_{k=1}^{2\nu}(-1)^{k+1}k^3=-\nu^2(4\nu+3).$$

**10.12.** Izračunati $S_2(n)=\sum_{k=1}^{n}k^2$ i $\sum_{k=1}^{n}S_2(k)^2$.

*Rezultat.* $\sum_{k=1}^{n}S_2(k)^2=\frac{1}{1\,260}n(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)(5n^2+10n-1)$.

**10.13.** Dokazati $\sum_{k=1}^{n}(a+bk)^2=n\left[a^2+ab(n-1)+\frac{b^2}{6}(2n^2+3n+1)\right]$.

**10.14.** Dokazati $\sum_{k=1}^{n}[n^2-(2k-1)n]=0$.

*Rešenje.* $\sum_{k=1}^{n}[n^2-(2k-1)n]=n^2\sum_{k=1}^{n}1-n\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^3-n\cdot\frac{1+(2n-1)}{2}n=0$.

**10.15.** Dokazati sumacione formule:

$$\sum_{k=1}^{n}(a+k-1)^2=nab+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1);$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a+k-1)^3=\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+ab\right\}\frac{1}{2}n(a+b);$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a+k-1)^4=an\left\{nb^2+(n-1)ab\right\}+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)\frac{3n(n-1)-1}{5},$$

gde je $b=a+n-1$.

**10.16.** Sumirati $\sum_{k=1}^{n}[a+(k-1)d]^2$.

*Rezultat.* $na^2+n(n-1)ad+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)d^2$.

**10.17.** Dokazati da je zbir kubova ma kojih $k$ uzastopnih celih brojeva deljiv zbirom tih brojeva.

**10.18.** Dokazati identitete:

$$\sum_{k=1}^{n} k(2k-1)=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1);$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1).$$

**10.19.** Dokazati identitete:

1° $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2;$

2° $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!\,k=(n+1)!-1;$

3° $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+1}\binom{n+1}{2}.$

***Rešenje.*** 2°

$$\sum_{k=1}^{n} k!\,k=\sum_{k=1}^{n}(\overline{k+1}-1)(k!)=\sum_{k=1}^{n}(k+1)!-\sum_{k=1}^{n}k!=(n+1)!-1.$$

**10.20.** Ako je $S_k(n)=\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k$, dokazati jednakost

$$nS_k(n)=S_{k+1}(n)+S_k(n-1)+S_k(n-2)+\cdots+S_k(2)+S_k(1).$$

***Dokaz.*** Posmatrajmo kvadratnu shemu:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $1^k$ | $2^k$ | $3^k$ | $\dots$ | $n^k$ |
| $1^k$ | $2^k$ | $3^k$ | | $n^k$ |
| $1^k$ | $2^k$ | $3^k$ | | $n^k$ |
| $\vdots$ | | | | |
| $1^k$ | $2^k$ | $3^k$ | | $n^k$ |

Zbir svih brojeva u jednoj vrsti je $S_k(n)$. Budući da u tablici ima $n$ vrsta, zbir svih brojeva u gornjoj shemi je $nS_k(n)$.

Ako sumiranje izvršimo po naznačenim izlomljenim linijama, dobijamo:

$$\begin{aligned} nS_k(n) = {} & 1^k \\ & +(1^k+2\cdot 2^k) \\ & +(1^k+2^k+3\cdot 3^k) \\ & +\cdots \\ & +[1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k+n\cdot n^k]. \end{aligned}$$

Dalje možemo pisati:

$$\begin{aligned} n S_k(n) = 1^{k+1} &+ [S_k(1) + 2^{k+1}] \\ &+ [S_k(2) + 3^{k+1}] \\ &+ \cdots \\ &+ [S_k(n-1) + n^{k+1}] \\ &= S_{k+1}(n) + S_k(n-1) + \cdots + S_k(2) + S_k(1). \end{aligned}$$

**10.21.** Ako su $n$ i $p$ prirodni brojevi, dokazati

(1) $$1\cdot 2\cdots p + 2\cdot 3\cdots (p+1) + \cdots + n(n+1)\cdots(n+p-1) = \frac{n(n+1)\cdots(n+p)}{p+1}.$$

***Rešenje.*** Uvedimo oznaku

$$S_n = [1\cdot 2\cdots p] + [2\cdot 3\cdots (p+1)] + \cdots + [n(n+1)\cdots(n+p-1)].$$

Tada je $S_{k+1} = S_k + [(k+1)(k+2)\cdots(k+p)]$. Ako formula (1) važi na $n=k$, tj. ako je

$$S_k = \frac{k(k+1)\cdots(k+p)}{p+1},$$

tada je

$$S_{k+1} = \frac{k(k+1)\cdots(k+p)}{p+1} + [(k+1)\ (k+2)\cdots(k+p)] = \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+p+1)}{p+1}.$$

Budući da je, uz to, formula (1) tačna za $n=1$, zaključuje se da je ona tačna i za svako $n=1, 2, 3, \ldots$

**10.22.** Dokazati

(1) $$\frac{1}{2} - \cos a + \cos 2a - \cdots + (-1)^n \cos na = \frac{(-1)^n \cos \frac{2n+1}{2} a}{2\cos \frac{a}{2}} \qquad \left(\cos\frac{a}{2} \neq 0\right).$$

Kako se ova jednakost može dobiti polazeći od

$$\frac{1}{2} + \cos a + \cos 2a + \cdots + \cos na = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} a}{2\sin \frac{a}{2}} \qquad \left(\sin \frac{a}{2} \neq 0\right)?$$

***Uputstvo.*** Umesto $a$ staviti $\pi + a$. Jednakost (1) može se dokazati polazeći od identiteta

$$(1-z^{n+1})/(1-z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n \qquad (z \text{ kompleksan broj} \neq 1).$$

**10.23.** Dokazati identitet

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} 3a + \cdots + \operatorname{tg}(n-1)a \operatorname{tg} na = (\operatorname{tg} na)/(\operatorname{tg} a) - n.$$

***Uputstvo.*** Upotrebiti identitet

$$\operatorname{tg}(n+1)a \operatorname{tg} na = \frac{\operatorname{tg}(n+1)a - \operatorname{tg} na}{\operatorname{tg} a} - 1 \qquad (\operatorname{tg} a \neq 0),$$

koji sleduje iz

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}[(n+1)a - na] = \frac{\operatorname{tg}(n+1)a - \operatorname{tg} na}{1 + \operatorname{tg}(n+1)a \operatorname{tg} na}.$$

**10.24.** Dokazati identitete:

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x} = 1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \cdots + 2\cos nx\,;$$

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \begin{cases} 2\cos(n-1)x + 2\cos(n-3)x + \cdots + 2\cos x & (n \text{ parno}), \\ 2\cos(n-1)x + 2\cos(n-3)x + \cdots + 1 & (n \text{ neparno}). \end{cases}$$

**10.25.** Dokazati jednakost $S = \sum_{n=1}^{6} \frac{\sin na}{\sin 5na} = 4$, gde je $a = \frac{\pi}{7}$.

***Rešenje.*** Kako je $a = \pi/7$, tj $7a = \pi$, imamo niz jednakosti: $\sin 4a = \sin 3a$, $\sin 5a = \sin 2a$ $\sin 6a = \sin a$, $\sin 10a = -\sin 3a$, itd., pa $S$ postaje

$$S = \frac{\sin a}{\sin 2a} - \frac{\sin 2a}{\sin 3a} + \frac{\sin 3a}{\sin a} + \frac{\sin 3a}{\sin a} - \frac{\sin 2a}{\sin 3a} + \frac{\sin a}{\sin 2a}$$

$$= 2\,\frac{\sin a \sin 3a - \sin^2 a}{\sin 2a \sin 3a} + \frac{\sin 3a}{\sin a}$$

$$= \frac{\cos 2a - \cos 4a - 1 + \cos 4a}{\sin 2a \sin 3a} + \frac{2\sin 3a}{\sin a}$$

$$= \frac{\sin a \cos 2a - \sin a + \sin 2a(1 - \cos 6a)}{\sin a \sin 2a \sin 3a}.$$

S obzirom da je $\cos 6a = -\cos a$, dobijamo

$$S = \frac{\sin 3a - \sin a + \sin 2a}{\sin a \sin 2a \sin 3a} = \frac{2\sin a \cos 2a + 2\sin a \cos a}{\sin 2a \sin 3a} = 2\,\frac{\cos 2a + \cos a}{\sin 2a \sin 3a}.$$

Ako umesto $\cos 2a$ stavimo $-\cos 5a$ i razliku kosinusa transformišemo u proizvod, nalazimo $S = 4$.

JEDNO HERMITEOVO MIŠLJENJE

»... Brojevi i funkcije nisu proizvoljne tvorevine našega duha; oni postoje van nas sa onim istim karakterom neophodnosti kao i stvari objektivne realnosti i mi ih nalazimo, otkrivamo i proučavamo ... «

O

Nemački matematičar E. Landau imao je odštampane odgovore „rešavateljima" Fermatovog problema, koji su glasili:

»Na strani ... u ... redu nalazi se greška«. (Nalaženje greške prepuštalo se docentu.)

# 11. GEOMETRIJA

**11.1.** Izračunati zapreminu koju ograničavaju dve jednake sfere tako postavljene da centar jedne od njih leži na površini druge.

***Rezultat.*** $\frac{5}{12}\pi r^3$ ($r$ poluprečnik sfere).

**11.2.** Dokazati da za svaki trougao $ABC$ važi

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cos A+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cos B+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cos C=3.$$

***Uputstvo.*** Primeniti kosinusnu teoremu.

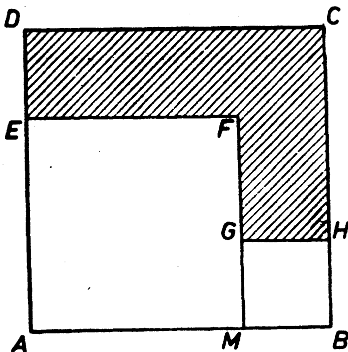
**11.3.** Ako strane $a$, $b$, $c$ trougla $ABC$ ispunjavaju uslov

(1) $$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca,$$

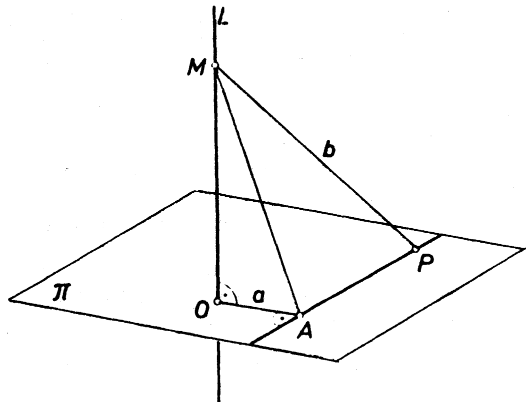
dokazati da je trougao $ABC$ ravnostran.

***Rešenje:*** (1) $\Leftrightarrow$ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ $\Leftrightarrow$ $a=b=c$.

**11.4.** Na strani $AB$ ($AB=a$) kvadrata $ABCD$ uočiti tačku $M$ tako da je $AM=x$ i konstruisati nad $AM$ i $BM$ kvadrate $AMFE$ i $MBHG$. Neka je $S_1$ površina $ABHGFE$ (nešrafirana površina), i $S_2$ površina $GHCDEF$ (šrafirana površina).



Slika uz zad. 11.4.



Slika uz zad. 11.5.

Izraziti $S_1$ i $S_2$ kao funkcije od $x$ i $a$.

1° Za koju vrednost od $x$ važi $S_1=S_2$?

2° Izračunati $x$ kada je $S_1=2S_2$ i geometrijskom konstrukcijom odrediti položaj tačke $M$ za taj slučaj.

3° Ako je $S_1=kS_2$, kada postoji rešenje za $x$?

**11.5.** Prava $L$ normalna je na ravni $\pi$ i prodire je u tački $O$. U ravni $\pi$ uočiti dve tačke $A$ i $P$, tako da je prava $OA$ normalna na pravoj $AP$.

1° Proveriti da li su tačne jednakosti:

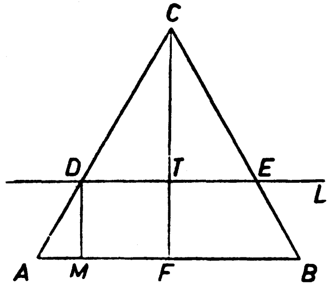
$$(OM)^2+(AP)^2=b^2-a^2, \quad (AM)^2+(OP)^2=a^2+b^2$$

$$(M \text{ jedna tačka na pravoj } L;\ OA=a,\ MP=b).$$

2° Odrediti $CD$ kao funkciju od $a$ i $b$ ako su $C$ i $D$ sredine duži $OA$ odnosno $MP$.

*Rezultat.* $CD=\frac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}$.

**11.6.** U ravnostranom trouglu strane $a$ povučena je kroz težište prava $L$ paralelna osnovici. Odrediti razmeru veličina površina na koje je trougao podeljen. Svaka od tih površina posebno vrši rotaciju oko prave $L$. Dokazati da tela koja nastaju tom rotacijom imaju jednake površine i jednake zapremine.




*Rešenje.* Kako je

(1) $$\triangle ABC \sim \triangle DEC,$$

biće

(2) $$\frac{\text{area } \triangle ABC}{\text{area } \triangle DEC}=\left(\frac{CF}{CT}\right)^2.$$

Kako se težišne linije i visine ravnostranog trougla poklapaju, biće $CF:CT=3:2$, pa iz (1) sleduje

$$\frac{\text{area } \triangle ABC}{\text{area } \triangle DEC}=\frac{9}{4}.$$

Odavde je

$$\frac{\text{area } \triangle ABC-\text{area } \triangle DEC}{\text{area } \triangle DEC}=\frac{\text{area trapeza } ABED}{\text{area } \triangle DEC}=\frac{5}{4}.$$

Rotacijom trougla $CDE$ oko prave $L$ nastaje telo sastavljeno od dve kupe. Površina i zapremina tog tela su:

(3) $$P_1=2\pi\, CT\cdot CD,$$ (4) $$V_1=2\pi\frac{(CT)^2\cdot TD}{3}.$$

Rotacijom trapeza $ABED$ oko prave $L$ nastaje valjak iz koga su izvađene dve kupe. Površina i zapremina tog tela respektivno su:

(5) $$P_2=2\pi\, TF\cdot AB+2\pi\, AD\cdot TF,$$ (6) $$V_2=2\pi\, AB\cdot(TF)^2-\frac{2}{3}\pi(TF)^2\cdot AM.$$

Iz (1) je

$$\frac{AC}{CD}=\frac{AB}{DE}=\frac{CF}{TC} \Rightarrow DE=\frac{2}{3}a \wedge AD=\frac{1}{3}a.$$

Budući da je $CF=\frac{3}{2}CT=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, dobija se

$$(3)\wedge(5) \Rightarrow P_1=P_2=\frac{4\pi a^2\sqrt{3}}{9},$$

$$(4)\wedge(6) \Rightarrow V_1=V_2=\frac{2\pi a^3}{27}.$$

**11.7.** U krugu poluprečnika $R$ upisan je kvadrat i ravnostrani trougao tako da mu je osnovica paralelna strani kvadrata. Rotacijom ove slike oko njene ose simetrije postaju valjak, kupa i lopta. Dokazati da je:

1° Površina valjka geometrijska sredina za površine dobijene lopte i kupe.

2° Zapremina valjka geometrijska sredina za zapremine lopte i kupe.

***Rešenje.*** 1° Neka je $2x$ strana ravnostranog trougla i $2y$ strana kvadrata. Tada su površine lopte, kupe i valjka respektivno

$$(1) \qquad P_l=4\pi R^2, \qquad P_k=3\pi x^2, \qquad P_c=6\pi y^2.$$

Kako je $x=\frac{R\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{R\sqrt{2}}{2}$, iz (1) proističe

$$P_k=\frac{9\pi R^2}{4} \wedge P_c=3\pi R^2 \Rightarrow P_l\cdot P_k=9\pi^2 R^4=P_c^2.$$

2° Zapremine lopte, kupe i valjka respektivno su:

$$V_l=\frac{4\pi R^3}{3}, \qquad V_k=\frac{1}{2}\pi x^2 R=\frac{3}{8}\pi R^3, \qquad V_c=2\pi y^3=\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}.$$

Kako je $V_l\cdot V_k=\frac{\pi^2 R^6}{2}=V_c^2$, tvrdenje 2° je dokazano.

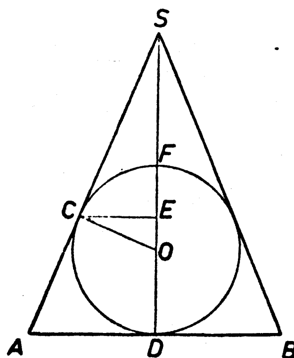
**11.8.** Na neprovidnoj ploči nalazi se neprovidna lopta poluprečnika $R$. Iznad te lopte na zamišljenoj pravoj, koja prolazi kroz loptino središte i stoji normalno na ploči, nalazi se svetlosni izvor u obliku tačke, udaljen od ploče za $a\,(a>2)$ loptinih poluprečnika.

1° Izračunati osvetljenu površinu lopte i površinu senke na ploči.

2° Šta biva sa ovim dvema površinama kada $a$ raste?

***Rešenje.*** 1° Kako je $\Delta CEO\sim\Delta COS$, dobija se

$$\frac{OE}{CO}=\frac{CO}{OS} \Rightarrow \frac{R-EF}{R}=\frac{R}{(a-1)R}.$$




Odavde je $EF=R\frac{a-2}{a-1}$, pa je osvetljena površina lopte

$$(1) \qquad P_1=2\pi R^2\frac{a-2}{a-1}=2\pi R^2\left(1-\frac{1}{a-1}\right).$$

Kako je $\Delta ADS\sim\Delta OCS$, biće

$$\frac{AD}{SD}=\frac{OC}{CS} \Leftrightarrow \frac{AD}{aR}=\frac{R}{\sqrt{(a-1)^2R^2-R^2}} \Rightarrow AD=\frac{aR}{\sqrt{a^2-2a}},$$

pa je površina senke na ploči

$$(2) \qquad P_2=\frac{\pi a R^2}{a-2}=\pi R^2\left(1+\frac{2}{a-2}\right).$$

2° Na osnovu (1) i (2) zaključujemo da $P_1$ raste sa $a$, i da $P_2$ opada sa $a$.
Kada $a\to 2$, tada $P_1\to 0$ (minimum), i $P_2\to+\infty$ (maksimum),
Kada $a\to+\infty$, tada $P_1\to 2\pi R^2$ (maksimum), i $P_2\to\pi R^2$ (minimum).

**11.9.** Dat je ravnokrako-pravougli trougao $ABC$ sa pravim uglom u $A$ i kracima $AB=AC=a$. U temenu $A$ trougla podignuta je normala na njegovu ravan dužine $AS=a$ i tačka $S$ spojena je sa $A$, $B$ i $C$.

1° Izračunati kao funkciju od $a$ površinu i zapreminu piramide čiji je vrh u tački $S$, a osnova $ABC$.

2° Preseći ovu piramidu jednom ravni paralelno osnovi kroz jednu tačku $M$ na ivici $AS$. Neka je $SM=x$ i $MNP$ taj presek. Posmatrati prizmu koja ima taj presek kao gornji bazis, a duž $MA$ kao bočnu ivicu. Izračunati zapreminu $V_1$ prizme i zapreminu $V_2$ piramide $SMNP$.

3° Gde treba da se nalazi tačka $M$ da bi bilo $V_1=V_2$? U kojoj razmeri presek $MNP$ deli piramidu?

**11.10.** Kroz vrh $S$ pravilnog tetraedra $SABC$ ivice $a$ postavljena je ravan paralelno ivici $BC$, tako da seče tetraedar po trouglu $SMN$.

1° Izraziti kao funkciju od $a$ i $x\,(=AM)$ zbir $\sigma$ kvadrata svih ivica tetraedra $SAMN$.

2° Ispitati promenu zbira $\sigma$ u zavisnosti od promene $x$ i grafički je predstaviti.

3° Izračunati zapreminu tetraedra $SAMN$ za onu vrednost $x$ za koju je zbir $\sigma$ minimalan.

4° Odrediti $x$ tako da obim trougla $SMN$ bude $\frac{11}{5}a$.

**11.11.** Koji od ravnokrakih trouglova upisanih u datom krugu ima maksimalan zbir osnovice i visine koja joj odgovara?

***Rešenje.*** Traženi zbir je (videti sliku)

$$s=2R\sin\alpha+R(1+\cos\alpha)=R(2\sin\alpha+\cos\alpha+1).$$

Ako se uvede $\varphi$ pomoću $\operatorname{tg}\varphi=2$, dobija se

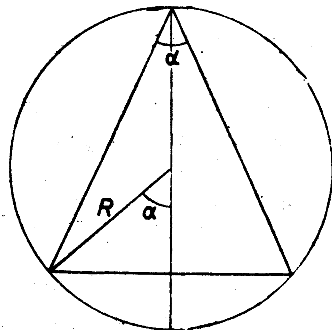
$$\frac{s}{R}=\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}+1.$$

Funkcija $s$ ima najveću vrednost kada je

$$\cos(\alpha-\varphi)=1 \Rightarrow \alpha=\varphi.$$

Iz $\operatorname{tg}\varphi=2$ sleduje $\varphi\approx 63^\circ 26' 6''$.

Prema tome je $\alpha\approx 63^\circ 26' 6''$, $s_{\max}=R(\sqrt{5}+1)$.




**11.12.** Date su dve sfere poluprečnika $R$ i $r$ $(<R)$ čije je centralno rastojanje $a$ $(R-r<a\leqslant R+r)$.

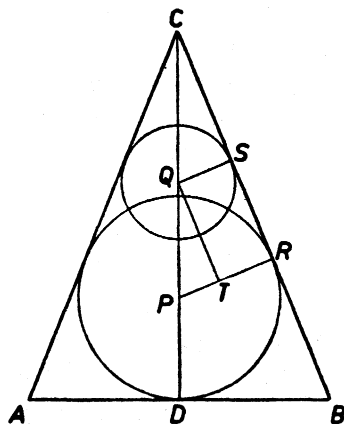
Izračunati zapreminu $V$ prave kružne kupe, opisane oko ovih sfera, kao funkciju veličina $a$, $R$, $k$ $(k=R-r)$.

Odrediti $a$ pod uslovom da zapremina $V$ ima minimalnu vrednost.

*Rešenje.* Neka je poluprečnik osnove kupe $AD=x$, a visina $CD=y$. Kako je

$$\triangle QSC \sim \triangle PTQ \quad \text{i} \quad \triangle DBC \sim \triangle PTQ$$

imamo redom




(1) $$\frac{QC}{QS}=\frac{PQ}{PT} \Leftrightarrow \frac{y-R-a}{r}=\frac{a}{R-r};$$

(2) $$\frac{DB}{DC}=\frac{PT}{TQ} \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{R-r}{\sqrt{a^2-(R-r)^2}};$$

$$(1)\wedge(2) \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{a+k}{a-k}}\,R \wedge y=\frac{a+k}{k}R,$$

pa je zapremina kupe

(3) $$V=\frac{\pi(a+k)^2}{3k(a-k)}R^3,$$

tj.

$$\pi R^3 a^2+(2\pi k R^3-3Vk)a+\pi k^2 R^3+3Vk^2=0.$$

Ova jednačina ima realne korene po $a$ ako i samo ako je

$$(2\pi k R^3-3Vk)^2-4\pi R^3(\pi k^2 R^3+3Vk^2)\geqslant 0,$$

odnosno

(4) $$3Vk^2(3V-8\pi R^3)\geqslant 0.$$

Kako je $V>0$; iz (4) sleduje $V\geqslant\frac{8}{3}\pi R^3$.

Prema tome, minimalna vrednost zapremine je $V=\frac{8}{3}\pi R^3$. Za ovu vrednost zapremine iz (3) dobijamo $a=3k$.

Tada $R-r<a\leqslant R+r$ postaje $R-r<3R-3r\leqslant R+r$, tj. $r<R\leqslant 2r$.

**11.13.** Dat je trougao $ABC$ ($AC=b$, $BC=a$) čija je hipotenuza $AB$. Kroz teme $C$ pravog ugla i to van trougla $ABC$ povučena je prava $L$ i na nju su ortogonalno projektovana temena $A$ i $B$ respektivno u tačkama $A'$ i $B'$

Odrediti položaj prave $L$ tako da zbir $AA'+BB'$ bude što veći.

*Rešenje.* Neka je $\measuredangle BCB'=\alpha$ $(0<\alpha<\pi/2)$, tada je $\measuredangle ACA'=90^\circ-\alpha$. Iz trougla $AA'C$ i $BB'C$ redom dobijamo

$$AA'=b\cos\alpha \quad \text{i} \quad BB'=a\sin\alpha.$$

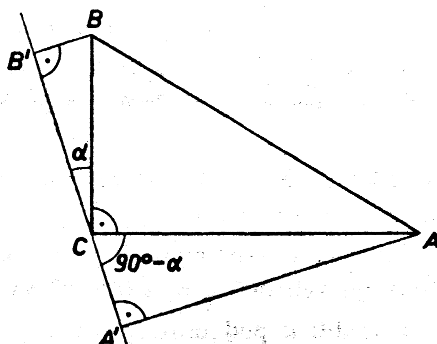
Treba odrediti ekstremum zbira

$$s=b\cos\alpha+a\sin\alpha=b\left(\cos\alpha+\frac{a}{b}\sin\alpha\right)$$

$$=b\,\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi} \qquad (\operatorname{tg}\varphi=a/b).$$

Funkcija $s$ ima maksimum kada je

$$\cos(\alpha-\varphi)=1 \Rightarrow \alpha=\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\varphi=a/b.$$



**11.14.** Zbir jedne katete i hipotenuze pravouglog trougla je $s$. Koliki je ugao između ove katete i hipotenuze u slučaju kada površina trougla ima maksimalnu vrednost?

***Rezultat.*** 60°.

**11.15.** U ravni su dati: krug $C$, prava $L$ i tačka $P$.

Konstruisati ravnostrani trougao čije je jedno teme tačka $P$, drugo se teme nalazi na pravoj $L$, a treće na krugu $C$.

***Rešenje.*** Neka je $L_1$ prava koja se dobija kada $L$ izvrši rotaciju od $\pm 60°$ oko tačke $P$. Pretpostavimo da $L_1$ seče krug $C$ u tački $Q$. Simetrala duži $PQ$ neka seče pravu $L$ u tački $R$. Tada je $PQR$ traženi ravnostrani trougao.

Obrazložiti navedenu konstrukciju, odrediti kriterijum za egzistenciju rešenja i navesti broj rešenja.

**11.16.** Dat je kvadrat $ABCD$ strane $a$, sa centrom u $O$. Kroz naspramna temena $A$ i $C$ kvadrata povučene su poluprave $AX$ i $CY$ koje stoje normalno na ravni kvadrata i to sa iste strane ravni. Na $AX$ uzeta je tačka $M$ tako da je $MO=a$, a na $CY$ tačka $N$ tako da je $MN=2a$.

1° Dokazati da $MN$ stoji normalno na ravni $DMB$.

2° Izračunati zapremine tetraedara $MABD$, $NCBD$ i $NMBD$.

**11.17.** Tačke $A_1$ i $A_2$ dele stranu $BC$ trougla na tri jednaka dela; tačke $B_1$ i $B_2$ odnosno tačke $C_1$ i $C_2$ dele redom strane $AC$ i $AB$ na tri jednaka dela. Navedene tačke raspoređene su po sledećem redu: $A, C_1, C_2, B, A_1, A_2, C, B_1, B_2, A$.

Prave $C_1C$, $A_1A$ i $B_1B$ ograničavaju trougao $T_1$. Prave $C_2C$, $A_2A$ i $B_2B$ ograničavaju trougao $T_2$.

1° Ispitati da li su veličine površina trouglova $T_1$ i $T_2$ jednake.

2° Odrediti razmere area $\triangle ABC$/area $\triangle T_1$ i area $\triangle ABC$/area $\triangle T_2$.

**11.18.** Između svih trouglova sa istom osnovicom $c$ i obimom $2s$, naći onaj koji ima najveću površinu.

***Rešenje.*** Ako ostale strane trougla označimo sa $x$ i $y$, onda su trouglove strane: $c$, $x$, $y=2s-c-x$.

Kvadrat površine $p$ trougla dobijamo prema Heronovoj formuli

$$p^2=s(s-c)(s-x)(c-s+x).$$

Pošto je faktor $s(s-c)$ konstantan, treba naći najveću vrednost izraza

$$(s-x)(c-s+x)=-(x-s)[x-(s-c)]$$

kada se $x$ menja. No, to je kvadratni trinom koji se anulira za $x=s$ ili $x=s-c$, a koeficijent pred $x^2$ mu je negativan. On dobija, prema tome, najveću vrednost za

$$=\frac{s+(s-c)}{2}=\frac{1}{2}(2s-c).$$

U tom slučaju je

$$y=2s-c-\frac{1}{2}(2s-c)=\frac{1}{2}(2s-c)=x.$$

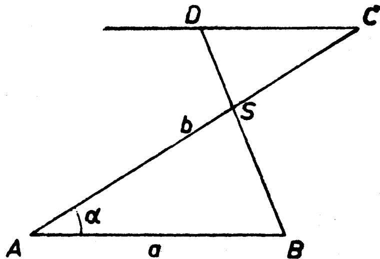
Dakle, traženi trougao je ravnokrak.

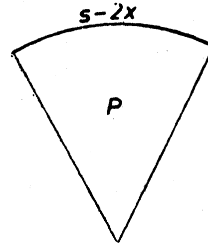
**11.19.** Neka je $AB=a$, $AC=b$, $\sphericalangle BAC=\alpha$ i neka je $AB \parallel CD$ $(AB>CD)$. Na duži $AC$ naći tačku $S$ za koju je zbir površina trouglova $ABS$ i $CDS$ najmanji (Vivianiev problem).

*Rešenje.* Ako je $AS=x$, tada je

$$\text{area}\ \triangle\ ABS+\text{area}\ \triangle\ CDS=\frac{1}{2}a\left(\frac{b^2}{x}-2b+2x\right)\sin\alpha=f(x),$$

te je minimum $f(b/\sqrt{2})=ab(\sqrt{2}-1)\sin\alpha$.

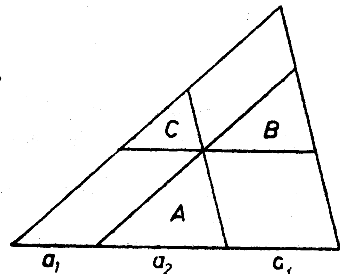



**11.20.** Dat je obim $s$ kružnog sektora. Na kome će krugu sektor imati najveću površinu?

*Rešenje.* $P=\frac{1}{2}x(s-2x)=f(x)$, $\quad f(s/4)=s^2/16$, maximum.

**11.21.** Kroz jednu tačku u trouglu $T$ povučene su prave paralelne stranama ovog trougla. Ove prave dele trougao na šest delova, od kojih su tri trouglovi. Ako su date površine tih trouglova, naći površinu trougla $T$.




*Rešenje.* Neka su $A$, $B$, $C$ trouglovi dobijeni podelom koji imaju za po jednu stranu redom delove strana $a$, $b$, $c$ trougla $T$ i neka slova $A, B, C, T$ označavaju i površine odgovarajućih trouglova. Ova četiri trougla su slična i stoga, prema slici,

(1) $\quad A=m^2T,\quad B=n^2T,\quad C=p^2T;$

(2) $\quad a_1=ma,\quad a_2=na,\quad a_3=pa.$

Prema slici je takođe

$$a_1+a_2+a_3=a,$$

tj., s obzirom na (2),

(3) $$m+n+p=1.$$

Zamenom u (3) vrednosti za $m$, $n$, $p$ koje daju jednakosti (1), dobija se

$$\sqrt{\frac{A}{T}}+\sqrt{\frac{B}{T}}+\sqrt{\frac{C}{T}}=1 \Rightarrow T=(\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C})^2.$$

Generalisati za tetraedar i telo u hiperprostoru.

**11.22.** U svakom trouglu čije su strane $a$, $b$, $c$ mogu se upisati tri kvadrata. Ako je $\lambda_k$ dužina strane kvadrata čija se dva temena nalaze na strani $k$ $(k=a, b, c)$ dokazati da važi

$$a>b>c \Rightarrow \lambda_a<\lambda_b<\lambda_c.$$

U svakom tetraedru mogu se upisati četiri kocke. Šta se može reći o veličini ovih kocki?

**11.23.** Izvan jednog kvadrata nalaze se pravougli trougao čija je hipotenuza jedna strana ovog kvadrata.

Dokazati da prava koja prolazi kroz presek kvadratovih dijagonala i teme pravog ugla pravouglog trougla polovi ovaj pravi ugao.

Dati rešenje koordinatnim ili geometrijskim metodom.

**11.24.** U ravnokrakom trouglu $ABC$ iz sredine $H$ osnove $BC$ spuštena je normala $HE$ na bočnu stranicu $AC$. Tačka $O$ polovi duž $HE$. Dokazati da su prave $AO$ i $BE$ normalne.

**11.25.** Naći površinu trougla čije su visine koreni jednačine

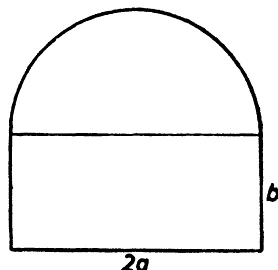
$$x^3 - kx^2 + qx - z = 0.$$

**11.26.** Ako za uglove $\alpha, \beta, \gamma$ jednog trougla važi jednakost

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2,$$

dokazati da je trougao pravougli.

**11.27.** Presek kanala je pravougaonik na koji je nadovezan polukrug (površina $P$ preseka kanala je konstantna). Troškovi oko izgradnje kanala proporcionalni su obimu preseka. Sa kakvim su dimenzijama ovi kanali najracionalniji?



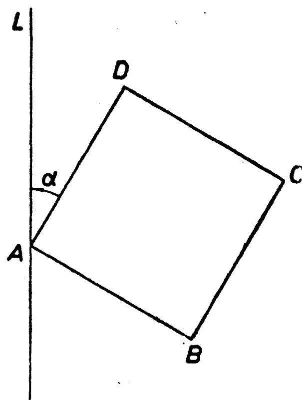

*Rezultat.* Širina pravougaonika treba da je dva puta veća od njegove visine.

**11.28.** Data je fiksna prava $L$ i jedna fiksna tačka $A$ na pravoj $L$. Tačka $A$ je jedno teme kvadrata $ABCD$ $(AB=a)$. Prava leži u ravni kvadrata $ABCD$ ali nijedna njena tačka ne leži u kvadratu.

Odrediti zapreminu $V(\alpha)$ i površinu $P(\alpha)$ tela koje se dobija kada kvadrat $ABCD$ rotira oko prave $L$, gde je

$$\alpha = \sphericalangle (AD, L) \leqslant \pi/2.$$

Ispitati varijacije funkcija $V(\alpha)$ i $P(\alpha)$ i grafički ih prikazati u Dekartovom pravouglom kordinatnom sistemu $O\alpha V$ odnosno $O\alpha P$.




*Rezultat.*

$$V(\alpha) = \pi a^3 (\sin\alpha + \cos\alpha), \quad P(\alpha) = 4\pi a^2 (\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Grafike ovih funkcija nacrtati polazeći od identiteta

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

**11.29.** Jedna strana pravouglog paralelepipeda je pravougaonik $ABCD$, a njoj paralelna strana je $A'B'C'D'$ ($AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ su paralelne duži). Kroz

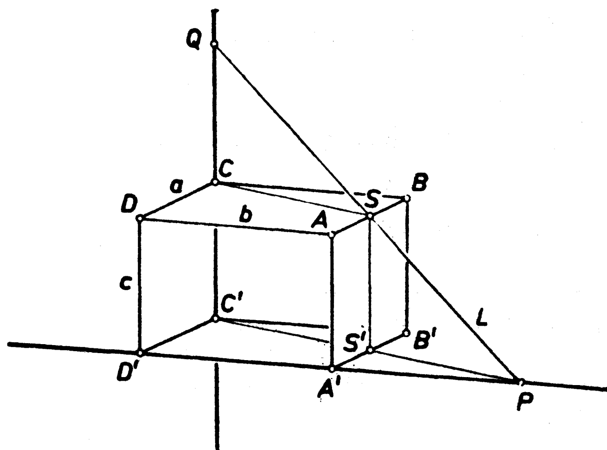
sredinu duži $AB$ povučena je prava $L$ tako da seče prave $CC'$ i $A'D'$. Koliki odsečak na pravoj $L$ odsecaju prave $CC'$ i $A'D'$ ako su ivice paralelepipeda $AB=a$, $AD=b$, $CC'=c$?

*Rešenje.* Neka je $S$ sredina duži $AB$, i neka su $P$ i $Q$ redom preseci prave $L$ sa pravama $A'D'$ i $CC'$. Neka je $S'$ ortogonalna projekcija tačke $S$ na ravni $A'B'C'D'$. Tačka $S'$ je sredina duži $C'P$. Zbog ovog je $S'P=CS$. Trouglovi $SS'P$ i $QCS$ su podudarni.

Na osnovu toga je $QS=SP$. Prema tome, dobijamo

$$(PQ)^2=4(SP)^2=4((SS')^2+(S'P)^2)=4c^2+(2S'P)^2=4c^2+(C'P)^2=4c^2+a^2+4b^2.$$

Dakle, $PQ=(a^2+4b^2+4c^2)^{1/2}$.



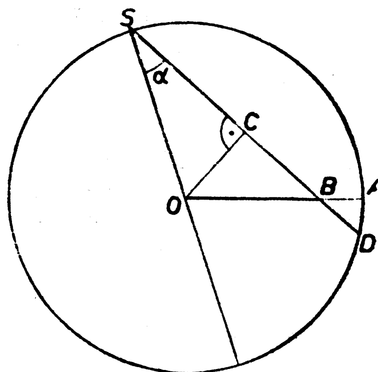

**11.30.** Posmatrati periferijske uglove koji pripadaju krugu $(O;r)$. Ako jedan krak periferijskog ugla prolazi kroz centar kruga $O$, a drugi kroz fiksnu tačku u krugu (na sl. tačka $B$), odrediti maksimalnu veličinu periferijskog ugla.

*Rešenje.* Neka je $OC=d$, $OS=r$, pa je $\sin\alpha=d/r$.

Ugao $\alpha$ biće maksimalan kada $d$ bude maksimalno. Budući da tetiva $SD$ prolazi kroz tačku $B$, imamo:

$$\max d=OB=a, \quad \max(\sin\alpha)=a/r,$$

$$\max\alpha=\arcsin(a/r).$$




**11.31.** Date su dve paralelne prave $L_1$ i $L_2$ i tačka $C$ koja se nalazi između njih.

1° Odrediti pravougli trougao $ABC$ tako da teme njegovog pravog ugla bude tačka $C$, da se njegova temena $A$ i $B$ nalaze respektivno na pravama $L_1$ i $L_2$ i da je area trougla $ABC$ minimalna (videti sliku 1).

2° Odrediti pravougli trougao $ABC$, tako da se teme $A$ njegovog pravog ugla nalazi na pravoj $L_1$, da tačka $B$ leži na pravoj $L_2$ i da je area trougla $ABC$ minimalna (videti sliku 2).

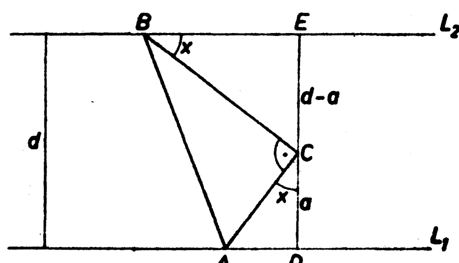
*Rešenje.* 1° Položaj temena pravog ugla $C$ u odnosu na prave $L_1$ i $L_2$ određen je rastojanjem $d$ ovih pravih i rastojanjem $CD=a$ temena $C$ od prave $L_1$.

Položaj i elementi traženog trougla $ABC$ određeni su sa $d$ i $a$ i uglom

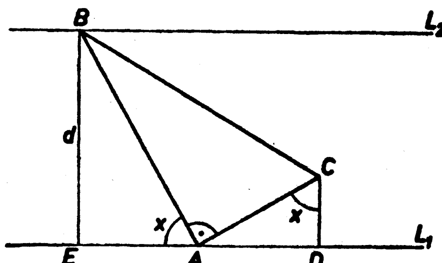
$$\sphericalangle ACD=\sphericalangle CBE=x.$$

Površina trougla $ABC$ je

(1) $$P=\frac{1}{2}AC\cdot BC.$$



Sl. 1



Sl. 2

Iz pravouglih trouglova $ADC$ i $CEB$ sleduje

(2) $$AC=\frac{a}{\cos x},\qquad BC=\frac{d-a}{\sin x}.$$

Zamenom u (1) dobija se

(3) $$P(x)=\frac{1}{2}\frac{a}{\cos x}\cdot\frac{d-a}{\sin x}=\frac{a(d-a)}{\sin 2x}.$$

Površina će dostići minimalnu vrednost kada $\sin 2x$ dostigne maksimum, tj. kada je

$$\sin 2x=1 \Leftrightarrow x=\pi/4.$$

Minimalna površina ima vrednost $P_{\min}=a(d-a)$.

2° Položaj i elementi traženog trougla određeni su u ovome slučaju (videti sliku 2) rastojanjima $d$ i $a$ i uglom $\sphericalangle ACD=\sphericalangle EAB=x$.

Iz pravouglih trouglova $ACD$ i $EAB$ sleduje

$$AC=\frac{a}{\cos x},\quad AB=\frac{d}{\sin x},$$

pa je površina trougla $ABC$ data formulom

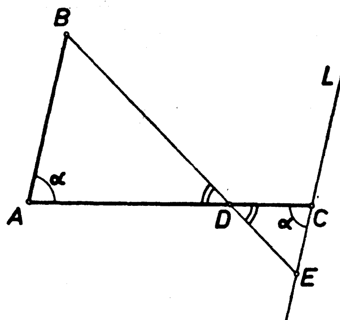
$$P(x)=\frac{1}{2}\frac{a}{\cos x}\cdot\frac{d}{\sin x}=\frac{ad}{\sin 2x}.$$

Površina $P(x)$ dostiže svoju minimalnu vrednost kada $\sin 2x$ dostigne svoj maksimum, tj. kad je $\sin 2x=1$. To će biti za $x=\pi/4$. Minimalna površina ima vrednost $P_{\min}=ad$.

**11.32.** Duži $AB$ i $AC$ čine ugao $\alpha$. Kroz $C$ povučena je prava $L$ paralelno pravoj $AB$. Prava kroz $B$ seče prave $AC$ i $L$ respektivno u $D$ i $E$. Odrediti tačku $D$ tako da zbir $S$ površina trougla $ABD$ i $DCE$ bude minimalan.

*Rešenje.* Pretpostavimo da se tačka $D$ nalazi između $A$ i $C$ i uvedimo oznake:

$$AB=a,\quad AC=b,\quad AD=x\quad (0<x<b).$$




Tada je

$$S(x)=\text{area}\ \triangle\ ABD+\text{area}\ \triangle\ CDE$$

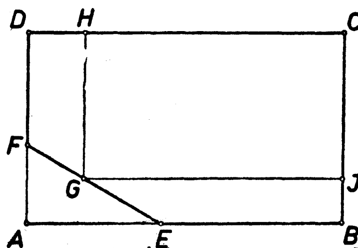
$$=\frac{1}{2}\,a\,x\sin\alpha+\frac{1}{2}(b-x)^2\frac{a}{x}\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\,a\sin\alpha\left[x+\frac{(b-x)^2}{x}\right].$$

Odavde sleduje $S_{\min}=(\sqrt{2}-1)\,ab\sin\alpha$ za $x=b/\sqrt{2}$.

Ostaje još da se prouči slučaj kada se $D$ ne nalazi između $A$ i $C$.

**11.33.** Dat je pravougaonik $ABCD$ $(AB=a,\ AD=b)$. Na strani $AB$ uočiti jednu tačku $E$ i na strani $AD$ tačku $F(AE=p,\ AF=q)$. Na duži $EF$ uzeti jednu tačku $G$ i povući prave $GH\parallel BC$, $GJ\parallel AB$.




Odrediti položaj tačke $G$ na duži $EF$, tako da pravougaonik $GJCH$ ima maksimalnu površinu.

**11.34.** U dati polukrug upisati trapez maksimalne površine.

**11.35.** U dati paraboličan odsečak upisati trougao: 1° maksimalne površine, 2° maksimalnog obima.

**11.36.** U dati kružni isečak sa centralnim uglom $\alpha\,(\leqslant\pi/2)$ upisati pravougaonik maksimalne površine, tako da mu osnovica leži na poluprečniku i jedno teme na luku.

*Rešenje.* Neka je kružni isečak dat poluprečnikom $r$ i centralnim uglom $\alpha$. Površina upisanog pravougaonika je

$$P=AB\cdot BC.$$

Izrazićemo $AB$ i $BC$ pomoću $r$, $\alpha$, $\varphi$, gde je $\varphi\,(0<\varphi<\alpha)$ promenljivi ugao. Sa slike je

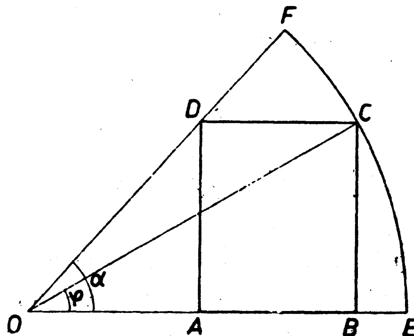
$$BC=r\sin\varphi,\qquad OB=r\cos\varphi,\qquad OA=\frac{AD}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{BC}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{r\sin\varphi}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Za površinu $P$ dobijamo

$$P=(OB-OA)\,BC=r^2\sin\varphi\left(\cos\varphi-\frac{\sin\varphi}{\operatorname{tg}\alpha}\right)=\frac{r^2}{\sin\alpha}\sin\varphi\sin(\alpha-\varphi),$$

odakle je

$$P=\frac{r^2}{\sin\alpha}\{\cos(2\varphi-\alpha)-\cos\alpha\}.$$




Površina će dostići maksimalnu vrednost kada $\cos(2\varphi-\alpha)$ dostigne maksimalnu vrednost, tj. kada je

$$\cos(2\varphi-\alpha)=1\Leftrightarrow\varphi=\frac{\alpha}{2}.$$

Kada je $\varphi=\alpha/2$, površina pravougaonika je

$$P=\frac{r^2}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

**11.37.** Od lista hartije kružnog oblika (poluprečnika $r$) izrezati sektor od koga treba načiniti konusni levak najveće zapremine. Koliki je centralni ugao $\alpha$ toga sektora?

*Rešenje.* Ako se poluprečnik osnove konusa označi sa $x$, iz

$$V=\frac{x^2\pi}{3}\sqrt{r^2-x^2} \quad \text{i} \quad \frac{dV}{dx}=0$$

dobija se da je za $x=r\sqrt{\frac{2}{3}}$ zapremina $V$ maksimalna.

Centralni ugao isečka nalazi se iz jednačine

$$\frac{\pi r \alpha}{180}=2\pi x \qquad \text{(dužina luka sektora} = 2\pi x\text{)},$$

odakle je

$$\alpha^0=\left(\frac{360x}{r}\right)^0=120^0\sqrt{6} \approx 293^0 56'.$$

**11.38.** Odrediti maksimalnu površinu pravougaonika opisanog oko date elipse.

*Rezultat.* Traženi pravougaonik je kvadrat čije su dijagonale glavne ose elipse i njegova površina je $p=2(a^2+b^2)$.

**11.39.** Odrediti minimalnu površinu pravog kružnog cilindra date zapremine $V$.

*Rešenje.* Neka je $x$ radijus osnove, a $y$ visina posmatranog cilindra. Onda za zapreminu $V$ i površinu $P$ imamo

$$V=\pi x^2 y, \qquad P=2\pi(x^2+xy),$$

odakle je

$$P=2\pi\left(x^2+\frac{V}{\pi x}\right).$$

Funkcija $P$ definisana je za sve pozitivne vrednosti promenljive $x$. Jednačina

$$\frac{dP}{dx}=2\pi\left(2x-\frac{V}{\pi x^2}\right)=0$$

ima u definicionom intervalu funkcije $P$ koren $x_1=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Kako je $P''(x_1)>0$, funkcija $P(x)$ za $x=x_1$ dostiže minimum, koji je ujedno i najmanja vrednost te funkcije.

Za visinu $y_1$ traženog cilindra dobijamo

$$y_1=\frac{V}{\pi x_1^2}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=2x_1.$$

Traženi cilindar je ravnostrani kružni cilindar i njegova površina je

$$P_{\min}=6\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3}$$

**11.40.** Odrediti maksimalnu zapreminu pravog kružnog konusa čija je izvodnica $s$ data.

*Rezultat.* Traženi konus je onaj čija se visina prema radijusu osnove odnosi kao $1 . \sqrt{2}$, tj. kao strana i dijagonala kvadrata. Njegova zapremina je

$$V_{max} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} s^3.$$

**11.41.** Odrediti maksimalnu zapreminu pravog kružnog konusa konstantne površine $S$.

*Rešenje.* Označimo radijus osnove konusa sa $x$, a njegovu izvodnicu sa $y$. Za površinu $S$ i zapreminu $V$ konusa imamo formule:

(1) $$S = \pi x^2 + \pi xy, \quad V = \frac{\pi}{3} x^2 \sqrt{y^2 - x^2}.$$

Eliminacijom $y$ iz (1) dobijamo

$$V^2 = \frac{1}{9} S[-2\pi(x^2)^2 + S(x^2)].$$

Kako funkcija $V^2$ predstavlja kradratni trinom po $x^2$, onda će dostići maksimalnu vrednost za $x^2 = \frac{S}{4\pi}$. Definicionom području funkcije $V^2$ pripada samo rešenje $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

Dakle, $x_1$ je radijus traženog konusa. Za njegovu izvodnicu $y_1$ dobijamo iz prve od jednačina (1)

$$y_1 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Prema tome, važi proporcija $x_1 : y_1 = 1 : 3$.

Traženi konus je onaj čiji se radijus osnove prema izvodnici odnosi kao $1:3$.

Za njegovu zapreminu dobijamo, prema (2) ili (1),

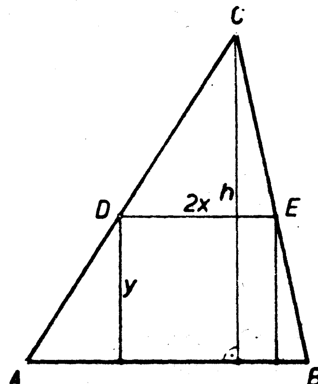
$$V_{max} = \frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{2\pi}}.$$

**11.42.** Odrediti minimalnu vrednost zbira površine omotača i jednog bazisa pravog kružnog cilindra date zapremine $V$.

**11.43.** Između pravouglih paralelepipeda koji imaju datu površinu $P$ i čija je osnova kvadrat, naći onaj koji ima najveću zapreminu.

*Rezultat.* Traženi pravougli paralelepiped je kocka ivice $(P/6)^{1/2}$. Maksimalna zapremina je $(P/6)^{3/2}$.

**11.44.** Odrediti maksimalnu zapreminu pravog kružnog cilindra upisanog u datom konusu.




*Rešenje.* Radijus osnove datog konusa (može i kosog ali takvog da mu se vrh projektuje u unutrašnjost osnove) neka je $r$, a visina $h$; radijus osnove upisanog cilindra neka je $x$, a visina $y$.

Strane $AB$ i $DE$ sličnih trouglova $ABC$ i $DEC$ (videti sliku) odnose se kao njihove visine, tj.

$$AB:DE = h:(h-y), \text{ tj. } 2r:2x = h:(h-y)$$

odakle je

(1) $$y = \frac{h}{r}(r-x).$$

Za zapreminu $V$ cilindra imamo

(2) $$V = \pi x^2 y = \frac{\pi h}{r}(rx^2 - x^3).$$

Treba naći najveću vrednost funkcije $V$, definisane sa (2) i $0 < x < r$.

Jednačina $V' = 0$ u $(0, r)$ ima samo koren $x_1 = \frac{2}{3} r$. Kako je $V''(x_1) < 0$, funkcija $V(x)$ za $x = x_1$ ima maksimum, koji je ujedno i najveća vrednost funkcije $V$.

Radijus traženog cilindra je $x_1$. Iz (1) izlazi $y = y_1 = \frac{h}{3}$.

Zapremina cilindra je $V_{\max} = \frac{4\pi}{27} r^2 h$.

**11.45.** Odrediti minimalnu površinu pravog kružnog konusa opisanog oko sfere poluprečnika $R$.

***Rešenje.*** Poluprečnik osnove konusa neka je $x$, izvodnica $s = x + y$, a visina $h$. Iz sličnosti trouglova $ADC$ i $SEC$ (videti sliku) sleduje

(1) $$\frac{AD}{DC} = \frac{SE}{EC}, \quad \text{tj.} \quad \frac{x}{h} = \frac{R}{y}$$

a iz $\triangle\, SEC$:

$$(SE)^2 + (EC)^2 = (SC)^2, \quad \text{tj.} \quad y^2 + R^2 = (h - R)^2$$

ili

(2) $$y = \sqrt{h^2 - 2Rh}.$$

Ako eliminišemo $y$ iz (1) i (2), dobijamo

(3) $$x = \frac{hR}{\sqrt{h^2 - 2Rh}}$$

Iz (2) i (3), za $s = AC = AE + EC = x + y$, sleduje

(4) $$s = \frac{h^2 - Rh}{\sqrt{h^2 - 2hR}}$$

Prema tome, za površinu konusa

$$P = \pi x^2 + \pi x s$$

na osnovu (3) i (4) nalazimo

(5) $$P = R\pi \frac{h^2}{h - 2R}.$$

Jednakost (5) određuje površinu $P$ kao funkciju od $h$ za $h > 2R$. Jednačina

$$\frac{dP}{dh} = R\pi \cdot \frac{h^2 - 4Rh}{(h - 2R)^2} = 0$$

ima u definicionom intervalu funkcije $P$ samo koren $h_1 = 4R$. Kako je $P''(h) > 0$, funkcija $P$ za $h = 4R$ dostiže najmanju vrednost.

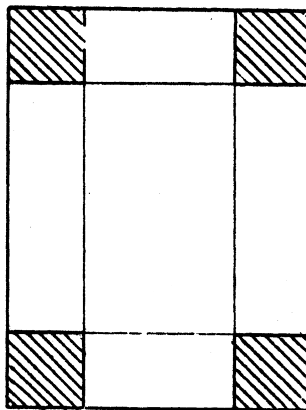
Traženi konus ima osobinu da je njegova visina jednaka dvostrukom dijametru date sfere. Njegova površina je $P_{\min} = 8\pi R^2$, tj. ona je jednaka dvostrukoj površini sfere oko koje je konus opisan.

**11.46.** Od jednog kartona pravougaonog oblika, čije su dimenzije $a$ i $b$ $(b>a)$, napraviti kutiju bez poklopca što veće zapremine prema datoj skici.

***Rešenje.*** Ako je $x$ strana kvadrata koji treba iseći (videti sliku) zapremina kutije je

$$V=x(a-2x)(b-2x)=abx-2(a+b)x^2+4x^3 \qquad \left(0<x<\frac{a}{2}\right).$$

Pošto je $x(a-2x)(b-2x)$ polinom trećeg stepena po $x$, čije su nule 0, $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, nule $x_1$ i $x_2$ njegovog izvoda zadovoljavaju relaciju



$$0<x_1<\frac{a}{2}<x_2<\frac{b}{2}.$$

Obe nule $x_1$ i $x_2$ su pozitivne, a samo manja od njih se nalazi u oblasti definisanosti funkcije $V(x)$.

Iz jednačine

$$\frac{dV}{dx}=ab-4(a+b)x+12x^2=0,$$

dobija se

$$x_1=\frac{a+b-\sqrt{(a+b)^2-3ab}}{6}.$$

**11.47.** Data je jedna prava kupa čija je visina $h$ i poluprečnik osnove $r$. Na odstojanju $x$ od osnove postavljena je ravan paralelna osnovi. Presek te ravni i kupe je osnova jednog pravog cilindra čija se druga osnova nalazi na osnovi kupe.

Odrediti $x$ tako da veličina površine cilindra bude maksimalna.

**11.48.** U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxy$ dati su krugovi

$$x^2+y^2-2x=0, \qquad x^2+y^2-4x-9=0.$$

Prava $y=x\operatorname{tg}\alpha$ seče ove krugove redom u tačkama $A$, $O$, $B$, $C$.

Izraziti $d=AO+BC$ kao funkciju od $\alpha$ i odrediti vrednost $\alpha$ za koje $d$ postaje ekstremum.

**11.49.** Normala u tački $M(x_0, y_0)$ parabole $y^2=2px$ seče ovu parabolu u tački $N$. Odrediti koordinate tačke $M$ tako da duž $MN$ ima minimalnu dužinu.

**11.50.** Svetlosni izvor u obliku tačke nalazi se na pravoj koja spaja centre $C_1$ i $C_2$ dve sfere poluprečnika $r$ i $R$ $(C_1C_2>R+r)$, koja se nalazi van tih sfera. Odrediti položaj svetlosnog izvora tako da zbir osvetljenih delova tih sfera bude najveći.

**11.51.** Date su dve ortogonalne prave $L_1$ i $L_2$. Na pravoj $L_2$ sa iste strane prave $L_1$ nalaze se dve tačke $A$ i $B$ čija su odstojanja od prave $L_1$ respektivno $a$ i $b$ $(a<b)$.

1° Odrediti ugao $\theta$ pod kojim se duž $AB$ vidi iz jedne tačke $S$ na pravoj $L_1$ kao funkciju od $a$, $b$, $s$, gde $s$ odstojanje tačke $S$ od prave $L_2$.

2° Za koje vrednosti $s$ ugao $\theta$ dostiže maksimalnu vrednost?

3° Ako su $a$, $b$, $\theta$ dati odrediti $s$. Ispitati pod kojim uslovima postoji rešenje i uporediti dobijene rezultate sa onima koji su nađeni pod tačkom 2°.

*Rešenje.* 1° Ako se prave $L_1$ i $L_2$ uzmu za koordinatne ose Dekartovog koordinatnog sistema, nalaženje ugla $\theta$ svodi se na određivanje ugla između pravih $AS$ i $BS$, pa je

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{s(b-a)}{s^2+ab}, \quad \text{tj.} \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{s(b-a)}{s^2+ab}.$$

2° Na osnovu ovog rezultata imamo

$$\max\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{b-a}{2\sqrt{ab}} \quad \text{za} \quad s=\sqrt{ab}.$$

3° Veličina $s$ određena je jednačinom

$$s^2\operatorname{tg}\theta-(b-a)s+ab\operatorname{tg}\theta=0,$$

odakle je

$$s=\frac{1}{2\operatorname{tg}\theta}\{b-a\pm\sqrt{(b-a)^2-4ab(\operatorname{tg}\theta)^2}\}.$$

Rešenje postoji samo ako je $\operatorname{tg}\theta\neq 0$, (jer bi u protivnom tačke $A$, $B$, $S$ bile kolinearne sa mogućnošću međusobnog poklapanja) i ako je

$$(b-a)^2-4ab(\operatorname{tg}\theta)^2 \geqslant 0,$$

odakle je

$$\max(\operatorname{tg}\theta)=\frac{b-a}{2\sqrt{ab}} \quad \Rightarrow \quad \max\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}.$$

U tom slučaju opet je $s=\sqrt{ab}$.

Rezultati pod tačkom 3° u saglasnosti su sa rezultatima 2°.

---

**BRILLOUINOVO MIŠLJENJE O MATEMATICI**

Léon Brillouin, francuski fizičar, u svojoj knjizi: *Notions élémentaires de mathématiques pour les sciences expérimentales* (Paris 1947) u uvodu kaže:

„Logika čini veliku lepotu metematike; ona privlači matematici duhove koji vole savršenstvo metodičnog uređenja. Ali svi mozgovi nisu sagrađeni na isti način i to je vrlo srećno! I dosta je njih koji se protive logičkoj metodi; oni rezonuju više intuitivno. Neki stav izgleda im očevidan, i onda zašto ga dokazivati; neki drugi stav ih odbija; dokaz njegove istinitosti neće ih ubediti, jer se ubeđenje ne može nametnuti — to je jedna psihološka činjenica. Jedan primer, jedno objašnjenje, moći će ukloniti sumnju tamo gde je neka hladno logička dedukcija ostavila slušaoca neosetljivim".

Treba primetiti da znatan broj fizičara i inženjera dele Brillouinovo mišljenje.

# 12. ANALITIČKA GEOMETRIJA

**12.1.** Prava koja prolazi kroz koordinatni početak $O$ seče prave

(1) $$x+y-4=0, \quad x-y-4=0$$

redom u tačkama $A$ i $B$.

Odrediti geometrijsko mesto sredina $M$ duži $AB$, kada prava $AB$ rotira oko tačke $O$.

***Rešenje.*** Prava $y=mx$ ($|m|\neq 1$) seče prave (1) u tačkama

$$A\left(\frac{4}{1+m}, \frac{4m}{1+m}\right), \quad B\left(\frac{4}{1-m}, \frac{4m}{1-m}\right).$$

Koordinate tačke $M$ su: $\xi=\frac{4}{1-m^2}$, $\eta=\frac{4m}{1-m^2}$.

Ako se eliminiše parametar $m$, dobija se $\xi^2-\eta^2=4\xi$, što znači da je geometrijsko mesto tačaka $M$ hiperbola $x^2-y^2=4x$.

**12.2.** Dati su skupovi tačaka

$$A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}, \quad B=\{(x,y)\,|\,y^2>2x\}, \quad C=\{(x,y)\,|\,y^2<-2x\}.$$

Na grafiku šrafirati oblasti:

$$A\cup B, \quad A\cup C, \quad B\cup C, \quad A\cap B, \quad A\cap C, \quad B\cap C,$$

$$A\setminus B, \quad B\setminus A, \quad A\setminus C, \quad B\setminus C, \quad (A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

**12.3.** U jednoj ravni dati su: jedan krug $C$ i jedna tačka $P$. Odrediti geometrijsko mesto tačaka $M$ koje su podjednako udaljene od kruga $C$ i tačke $P$. U slučaju kada se tačka $P$ nalazi van kruga, konstruisati ovo geometrijsko mesto.

**12.4.** Dokazati da je $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ jednačina kruga čiji jedan dijametar ima za krajnje tačke $(x_1, y_1)$ i $(x_2, y_2)$.

**12.5.** Odrediti odstojanje između parabole $y^2=2px$ i prave $Ax+By+C=0$ i primeniti rezultat na slučaj $4x+3y+46=0$, $y^2=64x$.

***Rezultat.*** Za partikularni slučaj $d_{\min}=2$.

**12.6.** Dat je krug $(O; r)$ jedan njegov prečnik $AB$ i jedna tačka $M$ na krugu. Tačka $M$ ortogonalno se projektuje u tačku $Q$ na $AB$. Prava $AN$ ($N$ sredina duži $MQ$) seče dati krug u $D$.

Odrediti i ispitati geometrijsko mesto preseka $P$ pravih $BD$ i $QM$ kada tačka $M$ opiše krug $(O; r)$.

***Uputstvo.*** Za $x$-osu Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema uzeti pravu $AB$ (sa pozitivnim smerom od $A$ ka $B$) i neka je $O$ koordinatni početak.

***Rezultat.*** Traženo geometrijsko mesto je elipsa $x^2/r^2+y^2/(4r^2)=1$.

***Generalizacija.*** Rešiti opštiji zadatak u slučaju kada tačka $N$ deli duž $QM$ u razmeri $m:n$.

**12.7.** Tačka $M$ parabole $P$ ortogonalno se projektuje u tačku $N$ na njenoj osi simetrije. Odrediti geometrijsko mesto sredina duži $MN$ kada se tačka $M$ kreće po paraboli $P$.

***Rešenje.*** Ne umanjujući opštost, možemo poći od sledeće jednačine parabole $P$

(1) $$y^2=2px.$$

Uzmimo jednu tačku $A(a,b)$ na traženom geometrijskom mestu. Prema uslovu zadatka tačka $M(a,2b)$ leži na paraboli $P$, pa njene koordinate zadovoljavaju jednačinu (1), tj

$$4b^2=2pa \Leftrightarrow b^2=\frac{1}{2}pa.$$

Odavde sleduje da je traženo geometrijsko mesto parabola $y^2=\frac{1}{2}px$.

**12.8.** Dokazati da ma koja tangenta parabole seče svoju fokalnu sečicu koja je normalna na njenoj osi simetrije, kao i direktrisu, u tačkama podjednako udaljenim od fokusa.

***Rešenje.*** Neka su $V$ i $W$ tačke preseka tangente parabole $y^2=2px$ u tački $M(x_1, y_1)$ sa fokalnom sečicom odnosno direktrisom.

Jednačina tangente glasi $\quad y_1y=p(x+x_1).$

Jednačina fokalne sečice $\quad x=\frac{p}{2}.$

Jednačine direktrise $\quad x=-\frac{p}{2}.$

Presek $V$ fokalne sečice i tangente je $\quad x=\frac{p}{2},\quad y=\frac{p}{y_1}\left(x_1+\frac{p}{2}\right).$

Presek $W$ direktrise i tangente je $\quad x=-\frac{p}{2},\quad y=\frac{p}{y_1}\left(x_1-\frac{p}{2}\right).$

Za dužine duži $FV$ i $FW$ dobija se

$$FV=\left|\frac{p}{y_1}\left(x_1+\frac{p}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|y_1+\frac{p^2}{y_1}\right|,$$

$$FW=\sqrt{p^2+\frac{p^2}{y_1^2}\left(x_1-\frac{p}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(y_1+\frac{p^2}{y_1}\right)^2}=\frac{1}{2}\left|y_1+\frac{p^2}{y_1}\right|,$$

odakle izlazi $FV=FW$.

**12.9.** Iz jedne fiksne tačke $P$ kruga $(O;r)$ povučena je njegova tetiva $PQ$. Odrediti i nacrtati geometrijsko mesto tačaka $M$ za koje je

(1) $$\overrightarrow{PM}=\lambda\cdot\overrightarrow{PQ} \quad (\lambda>0).$$

***Rešenje 1.*** Postavimo početak koordinatnog sistema u centar kruga i neka tačke $M$, $P$, $Q$ imaju koordinate $(X, Y)$, $(x_1, y_1)$, $(x, y)$. Tada vektorskoj jednakosti (1) odgovaraju sledeće skalarne jednakosti

$$X-x_1=\lambda(x-x_1),\qquad Y-y_1=\lambda(y-y_1).$$

Eliminacijom $x$ i $y$ iz ovih jednakosti i $x^2+y^2=r^2$ dobija se

$$\{X+(\lambda-1)x_1\}^2+\{Y+(\lambda-1)y_1\}^2=\lambda^2r^2.$$

Prema tome, traženo geometrijsko mesto je krug sa centrom u tački $((1-\lambda)x_1, (1-\lambda)y_1)$ i poluprečnikom $\lambda r$.

***Rešenje* 2.** Kako je $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}$, iz (1) sleduje

$$\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM}=\lambda(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}) \Leftrightarrow \lambda\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OM}+(1-\lambda)\overrightarrow{PO}.$$

Prema tome je

$$\lambda|\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OM}-(1-\lambda)\overrightarrow{OP}|. \tag{2}$$

Budući da je $\overrightarrow{OP}=\text{const}$ i $|\overrightarrow{OQ}|=r$ jednačina (2) određuje krug poluprečnika $\lambda r$ sa centrom u tački datoj krajem vektora $(1-\lambda)\overrightarrow{OP}$.

**12.10.** Odrediti geometrijsko mesto sredina strana svih kvadrata koji su upisani u datom kvadratu.

***Rešenje.*** Neka je $a$ strana datog kvadrata $OABC$ i neka strane $OA$ i $OC$ leže na $x$-osi odnosno $y$-osi jednog Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema. Tada su temena kvadrata $PQRS$ koji je upisan u kvadratu $OABC$:

$$P(t,0),\quad Q(a,t),\quad R(a-t,a),\quad S(0,a-t)$$
$$(0<t<a).$$

Sredine strana ovog kvadrata su tačke

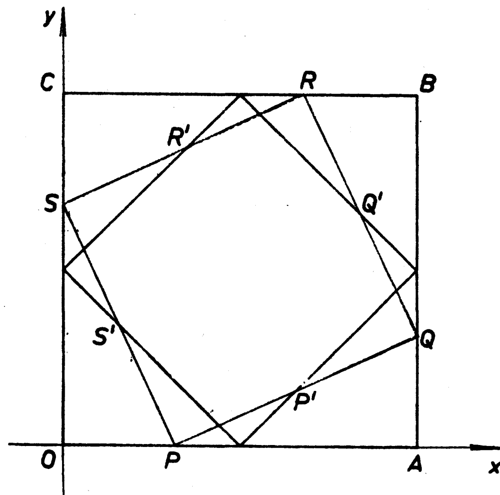
$$P'\left(\frac{a+t}{2},\frac{t}{2}\right),\quad Q'\left(\frac{2a-t}{2},\frac{a+t}{2}\right),$$

$$R'\left(\frac{a-t}{2},\frac{2a-t}{2}\right),\quad S'\left(\frac{t}{2},\frac{a-t}{2}\right).$$

Tačke $P', Q', R', S'$, nalaze se redom na pravama:

$$y=x-\frac{a}{2},\quad y=-x+\frac{3a}{2},$$

$$y=x+\frac{a}{2},\quad y=-x+\frac{a}{2}.$$




Uzimajući u obzir da je $0<t<a$, zaključujemo da je traženo geometrijsko mesto kontura kvadrata sa temenima $\left(\frac{a}{2},0\right)$, $\left(a,\frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2},a\right)$, $\left(0,\frac{a}{2}\right)$. Ono je na slici predstavljeno debljim linijama.

**12.11.** Nad hipotenuzom $BC$ jednog pravouglog trougla $ABC$ konstruisan je kvadrat $BCDE$ (van trougla). Tačka $A$ ostaje utvrđena, pravac i smer strana $AB$ i $AC$ ostaju nepromenljivi, dok se tačke $B$ i $C$ pomeraju tako da je $AB+AC=\text{const}=k\ (>0)$.

1° Odrediti geometrijska mesta temena $D$ i $E$.

2° Odrediti geometrijska mesta sredina strana ovog kvadrata.

***Rešenje.*** 1° Ako se prava $AB$ uzme za $x$-osu Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema, tačka $A$ za početak koordinatnog sistema i dužine $AB$ i $AC$ označe sa $p$ i $q$, koordinate tačaka $C$ i $D$ su $(0,q)$ i $(q,p+q)$. Pošto je $p+q=k$ i $0<q<k$, geometrijsko mesto tačke $D$ je duž $y=k\ (0<x<k)$. Na isti način dobijamo da je geometrijsko mesto tačke $E$ duž $x=k\ (0<y<k)$.

2° Označimo sredine strana $BE$, $ED$, $DC$, $CB$ redom sa $M$, $N$, $P$, $Q$. Koordinate ovih tačaka su redom:

$$\left(\frac{p+k}{2}, \frac{p}{2}\right), \quad \left(\frac{k+q}{2}, \frac{k+p}{2}\right), \quad \left(\frac{q}{2}, \frac{k+q}{2}\right), \quad \left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right),$$

pa su geometrijska mesta ovih tačaka duži:

za tačku $M$: $\quad x=y+\frac{k}{2} \quad \left(0<y<\frac{k}{2}\right)$,

za tačku $N$: $\quad x+y=\frac{3}{2}k \quad \left(\frac{k}{2}<x<k\right)$,

za tačku $P$: $\quad y=\frac{k}{2}+x \quad \left(0<x<\frac{k}{2}\right)$,

za tačku $Q$: $\quad x+y=\frac{k}{2} \quad \left(0<x<\frac{k}{2}\right)$.

**12.12.** Dati su: nepokretan prav ugao $MON$, na kraku $OM$ dve nepomične tačke $A$ i $B$ i na kraku $ON$ jedna pomična tačka $C$. U tački $A$ normalno na pravoj $AC$ povučena je prava $AA'$, u tački $B$ normalno na pravoj $BC$ prava $BB'$.

Odrediti geometrijsko mesto preseka pravih $AA'$ i $BB'$ kada se tačka $C$ kreće po kraku $ON$.

*Rešenje.* Neka $x$-osa i $y$-osa Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema leže na kracima $ON$ i $OM$ ugla $MON$ ($O$ koordinatni početak). Neka koordinate tačaka $A$, $B$, $C$ budu:

$$A(0, b_1), \quad B(0, b_2), \quad C(a, 0).$$

Jednačine pravih $AC$ i $BC$ su

$$(AC) \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b_1}=1, \qquad (BC) \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b_2}=1,$$

a pravih $AA'$ i $BB'$

$$(AA') \quad y-b_1=\frac{a}{b_1}x, \qquad (BB') \quad y-b_2=\frac{a}{b_2}x.$$

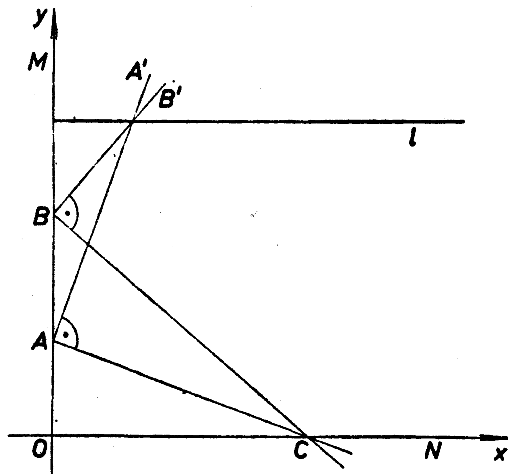
Iz dve poslednje jednačine izlazi

$$y(b_2-b_1)=b_2^2-b_1^2.$$

Traženo geometrijsko mesto određeno je uslovima:

$$y=b_1+b_2 \qquad (x>0).$$

Ovo je poluprava $l$.




**12.13.** Data je ravnostrana hiperbola

$$(1) \qquad xy=a^2 \qquad (a=\text{const}).$$

Kroz tačku $M$ ove krive povučene su dve prave: $L_1$ paralelno $x$-osi i $L_2$ kroz koordinatni početak $O$. Normala na pravoj $L_2$ u tački $O$ seče pravu $L_1$ u tački $P$.

Odrediti i ispitati geometrijsko mesto tačaka $P$ kada se $M$ kreće po onoj grani hiperbole (1) koja se nalazi u prvom kvadrantu.

**12.14.** Date su parabole

$$y^2+4x-4=0, \qquad 8x^2-2x-3y-6=0.$$

1° Odrediti koordinate njihovih presečnih tačaka i ispitati da li one leže na jednom krugu.

2° U presečnim tačkama povući normale na prvu krivu i dokazati da se tri od ovih normala seku u jednoj tački.

*Rezultat.* 1° Presečene tačke su: $(0,-2)$, $(1, 0)$, $(3/4,-1)$, $(-5/4, 3)$. 2° Tri normale (podnožja: prva, treća i četvrta od navedenih tačaka) seku se u tački $(-11/4, 3/4)$.

**12.15.** Prave $L_1$ i $L_2$ seku se u tački $O$. Na $L_1$ uzete su tačke $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a na $L_2$ tačke $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Odrediti maksimalni broj trouglova čija su temena tačke:

1° Tri tačke iz skupa tačaka $A_k$, $B_k$, $k=1, 2, \ldots, n$;

2° Tačka $O$ i dve tačke iz skupa tačaka $A_k$, $B_k$, $k=1, 2, \ldots, n$.

*Rezultat.* 1°. $n^2(n-1)$.

**12.16.** U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxy$ prava $OD$ rotira oko tačke $O$. Nepomična tačka $A\ (a, 0)$ ortogonalno se projektuje u $P$ na $OD$; tačka $P$ se ortogonalno projektuje u $Q$ na $Oy$; tačka $Q$ se ortogonalno projektuje u $M$ na $OD$.

Odrediti i nacrtati geometrijsko mesto tačaka $M$.

**12.17.** Odrediti i ispitati geometrijsko mesto centara krugova upisanih u pravougle trougle sa zajedničkom hipotenuzom.

**12.18.** U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu temena kvadrata su: $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(a,a)$, $C(0,a)$. Prava $y=mx$ seče pravu $BC$ u tački $E$, prava $AE$ seče $y$-osu u tački $D$. Prave $OE$ i $BD$ seku se u tački $P$.

Dokazati da je geometrijsko mesto tačaka $P$ kada se $m$ menja, skup elipsi sa parametrom $a$. Izračunati veličinu površine tih elipsi i odrediti geometrijsko mesto centara ovih elipsi kada se $a$ menja.

**12.19.** Dat je ravnokrak trougao $ABC$ ($AB=2a$, $AC=BC$). Prava $BC$ i normala u tački $A$ na $AC$ seku se u $P$.

Odrediti geometrijsko mesto tačaka $P$ kada se tačka $C$ kreće, dok je osnovica ravnokrakog trougla $ABC$ fiksna.

*Rešenje.* Neka je $x$-osa prava $AB$ (pozitivan smer od $A$ ka $B$), $O$ (sredina osnovice koordinatni početak Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema.

Jednačina prave $BC$ je

(1) $$x/a+y/\lambda=1 \qquad (OC=\lambda),$$

a jednačina prave kroz $A$ koja stoji normalno na $AC$ glasi

(2) $$y=-\frac{a}{\lambda}(x+a).$$

Kretanjem tačke $C$ po pravoj $OC$ menja se parametar $\lambda$. Ako se iz (1) i (2) elim dobija se

(3) $$x^2-y^2=a^2.$$

Treba još ispitati da li je traženo geometrijsko mesto ravnostrana hiperbola (3) ili samo njen deo.

Iz (1) i (2) dobijamo $x=\dfrac{a(a^2+\lambda^2)}{\lambda^2-a^2}$. Kako je $a>0$, imamo $\operatorname{sgn} x=\operatorname{sgn}(\lambda^2-a^2)$. Tako je $x<0$ za $|\lambda|<a$ i $x>0$ za $\lambda>a$ ili $\lambda<-a$. Prema tome, ako se tačka $C$ nalazi u unutrašnjosti kvadrata čija je jedna dijagonala strana $AB(AB=2a)$, geometrijsko mesto tačaka $P$ je ona grana hiperbole $x^2-y^2=a^2$ na kojoj se nalazi tačka $A$. Ako je tačka $C$ izvan toga kvadrata, geometrijsko mesto je druga grana hiperbole.

**12.20.** Dat je pravougli trougao $ABC$ ($\sphericalangle BAC=90°$). Tačka $H$ je ortogonalna projekcija tačke $A$ na pravoj $BC$. Neka je $M$ tačka katete $AB$, između tačaka $A$ i $B$. Iz $M$ je spuštena normala $MN$ ($N$ podnožje normale) na pravu $AH$. Normala u tački $N$ na pravoj $NC$ seče pravu $AB$ u tački $Q$.

Proveriti da li je $BM=AQ$.

**12.21.** U odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem data je tačka $M$ (1, 1). Prava kroz $M$ rotira oko tačke $M$ i seče $x$-osu i $y$-osu respektivno u tačkama $A$ i $B$.

Obrazovati jednačinu geometrijskog mesta preseka pravih od kojih jedna prolazi kroz $A$ paralelno $y$-osi, a druga kroz $B$ paralelno $x$-osi. Ispitati ovo geometrijsko mesto.

**12.22.** Dati su: nepokretna duž $AB$ ($AB=2a$), čija je sredina tačka $O$, i dve pokretne tačke $C$ i $D$ na normalama podignutim u tačkama $A$ i $B$ na duž $AB$, tako da je ugao $COD$ prav.

Odrediti i ispitati geometrijsko mesto preseka pravih $AD$ i $BC$.

Uzeti i slučaj kada je $\sphericalangle COD=\theta\,(\neq\pi/2)$.

*Rešenje.* Izaberimo pravu $AB$ za $x$-osu Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema (pozitivan smer od $A$ ka $B$), tačku $O$ za koordinatni početak. Tada tačke $A, B, C, D$ redom imaju koordinate

$$(-a,0),\quad (a,0),\quad (-a,r),\quad (a,s)\quad (AC=r,\ BD=s).$$

Jednačine pravih $AD$ i $BC$ redom su

$$(1)\qquad y=\frac{s}{2a}(x+a),\qquad y=-\frac{r}{2a}(x-a).$$

Uslov normalnosti pravih $OC$ i $OD$ je

$$(2)\qquad rs=a^2.$$

Iz jednačina (1) i (2) dobija se

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2/4}=1.$$

Geometrijsko mesto je elipsa čije su poluose $a$ i $a/2$.

Ako je kretanje neprekidno, da li je geometrijsko mesto cela periferija elipse ili samo njen deo?

Još treba ispitati slučaj: $\sphericalangle COD=\theta\neq\pi/2$.

Takođe je interesantno posmatrati slučaj kada tačka $O$ ne leži na sredini duži $AB$, već se nalazi između tačaka $A$ i $B$ tako da je $OB=b$, $OA=2a-b$.

**12.23.** U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxy$ dat je kvadrat $OABC$. Teme $A$ ima koordinate $(a, b)$; temena $O, A, B, C$ raspoređena su naznačenim redom, u smislu protivnom kretanju kazaljke na satu.

Neka je $OA'B'C'$ drugi kvadrat čija su temena raspoređena u napred navedenom smislu. Teme $A'$ ima koordinate $(a', b')$.

Dokazati da se prave $AA'$, $BB'$, $CC'$ seku u jednoj tački.

*Rešenje.* Koordinate tačaka $B$ i $C$ redom su $(a-b, a+b)$, $(-b, a)$. Koordinate tačaka $B'$ i $C'$ su: $(a'-b', a'+b')$, $(-b', a')$.

Jednačine pravih $AA'$, $BB'$, $CC'$ redom su

(1) $$(b'-b)x-(a'-a)y=ab'-a'b,$$

(2) $$(a'+b'-a-b)x-(a'-b'-a+b)y=2(ab'-a'b),$$

(3) $$(a'-a)x+(b'-b)y=ab'-a'b.$$

Ove tri jednačine nisu nezavisne, jer se sabiranjem jednačina (1) i (3) dolazi do jednačine (2). Kako se tačke $A$ i $A'$ ne poklapaju, biće $(a'-a)^2+(b'-b)^2>0$. Koordinate presečne tačke su:

$$x=\frac{ab'-a'b}{(a-a')^2+(b-b')^2}(a'+b'-a-b),\quad y=\frac{ab'-a'b}{(a-a')^2+(b-b')^2}(a-a'-b+b').$$

**12.24.** Pravougli trougao, čiji je jedan oštar ugao $\alpha$, klizi po ravni tako da se temena njegovih oštrih uglova kreću duž dve date normalne prave. Naći geometrijsko mesto temena pravog ugla ovog trougla.

*Rešenje* 1. Neka je $ABC$ dati trougao, $\alpha$ njegov ugao čije je teme $A$ i neka je $C$ teme pravog ugla. Prave po kojima se kreću tačke $A$ i $B$ uzmimo za $y$-osu i $x$-osu Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema $Oxy$. Prave $AB$, $AC$, $BC$ definisane su respektivno pomoću jednačina:

(1) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0,$$

(2) $$y-\lambda x-b=0 \qquad (OB=a,\quad OA=b),$$

(3) $$\lambda y+x-a=0.$$

Koeficijent pravca prave $AB$ je $-b/a$, a prave $AC$ je $\lambda$. Stoga je

(4) $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{b+a\lambda}{a-b\lambda}.$$

Ako iz (2) i (3) eliminišemo $y$, pa onda $x$ iz istih jednačina, dobijamo respektivno:

(5) $$y(1+\lambda^2)-b-a\lambda=0,\qquad x(1+\lambda^2)-a+b\lambda=0,$$

odakle je

(6) $$\frac{b+a\lambda}{a-b\lambda}=\frac{y}{x}.$$

Iz (4) i (6) izlazi

(7) $$y=x\operatorname{tg}\alpha.$$

Tačke $C$ geometrijskog mesta leže na pravoj (7). No, svaka tačka ove prave ne pripada geometrijskom mestu. Zaista, za koordinate $x$, $y$ tačke $C$ iz (5) dobijamo

$$\left(x=\frac{a-b\lambda}{1+\lambda^2},\quad y=\frac{b+a\lambda}{1+\lambda^2}\right)\Rightarrow (OC)^2=x^2+y^2=\frac{a^2+b^2}{1+\lambda^2}=\frac{(AB)^2}{1+\lambda^2}.$$

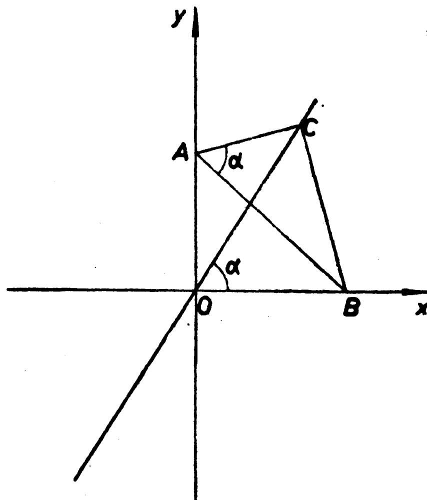
Najveća vrednost rastojanja $OC$ jednaka je, dakle, dužini strane $AB$.

Traženo geometrijsko mesto je duž na pravoj (7) dužine $2AB$ čija se sredina nalazi u preseku pravih po kojima se kreću temena $A$ i $B$.

***Rešenje*** 2. Pošto je

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle AOB = 90° + 90° = 180°,$$

četvorougao $ACBO$ je tetivan, tj. uglovi $\sphericalangle BOC$ i $\sphericalangle BAC = \alpha$ su periferijski uglovi nad istim lukom pa je $\sphericalangle BOC = \alpha$.




Na osnovu ovoga zaključujemo da se tačka $C$ pri pomeranju trougla kreće po pravoj $y = x \operatorname{tg} \alpha$.

Kako je trougao $ABC$ dat, određen je i prečnik kruga opisanog oko tog trougla. Taj prečnik je jednak hipotenuzi $AB$. Krug opisan oko trougla $ABC$ ujedno je opisan i oko četvorougla $ACBO$. Zato $OC$, kao tetiva tog kruga, zadovoljava nejednakost

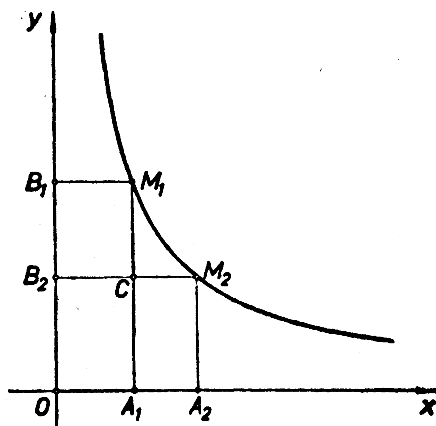
$$OC < AB.$$

Dakle, traženo geometrijsko mesto tačaka je segment prave $y = x \operatorname{tg} \alpha$ dužine $2\,AB$ koji je simetrično postavljen u odnosu na koordinatni početak.

Primetimo još šta bi bilo traženo geometrijsko mesto da smo umesto direktno orijentisanog trougla $ABC$ uzeli suprotno orijentisani. Tada bi traženo geometrijsko mesto tačaka bio simetričan lik nađenog odsečka prave $y = x \operatorname{tg} \alpha$ u odnosu na $y$-osu.

**12.25.** Neka su $M_1$ i $M_2$ dve tačke na jednoj grani hiperbole $y = a^2/x$ i neka su $A_1$ i $A_2$ njihove ortogonalne projekcije na $x$-osi a $B_1$ i $B_2$ na $y$-osi.

Bez upotrebe integralnog računa proveriti da li postoji jednakost: area krivolinijskog trapeza $A_1 A_2 M_2 M_1$ = area krivolinijskog trapeza $B_1 B_2 M_2 M_1$.




***Rešenje.*** Ako je $C$ tačka preseka pravih $A_1 M_1$ i $B_2 M_2$, tada je

$$\text{area } A_1 A_2 M_2 C = (x_2 - x_1) y_2$$

$$= (x_2 - x_1)\frac{a^2}{x_2} = a^2 - \frac{a^2 x_1}{x_2},$$

$$\text{area } B_1 B_2 C M_1 = x_1 (y_1 - y_2)$$

$$= x_1\left(\frac{a^2}{x_1} - \frac{a^2}{x_2}\right) = a^2 - \frac{a^2 x_1}{x_2}.$$

Kako su navedene površine jednake i kako je krivolinijski trougao $M_1 C M_2$ zajednički za oba krivolinijska trapeza, krivolinijski trapezi $A_1 A_2 M_2 M_1$ i $B_1 B_2 M_2 M_1$ imaju jednake površine.

**12.26.** Ako apscise četiri tačke $M_k(x_k, y_k)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ jedne grane hiperbole $y = a^2/x$ ispunjavaju uslov

$$(1) \qquad x_1/x_2 = x_3/x_4,$$

dokazati da je area pravolinijskog trapeza $M_1 M_2 N_2 N_1$ = area pravolinijskog trapeza $M_3 M_4 N_4 N_3$ ($N_k$ ortogonalna projekcija tačke $M_k$ na $x$-osi).

***Dokaz.*** Površina pravolinijskog trapeza $M_1 M_2 N_2 N_1$ je

$$(2) \qquad (x_2 - x_1)\frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2}\left(\frac{a^2}{x_2} + \frac{a^2}{x_1}\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2}\right),$$

dok je površina pravolinijskog trapeza $M_3M_4N_4N_3$

(3) $$(x_4-x_3)\frac{y_4+y_3}{2}=\frac{x_4-x_3}{2}\left(\frac{a^2}{x_4}+\frac{a^2}{x_3}\right)=\frac{a^2}{2}\left(\frac{x_4}{x_3}-\frac{x_3}{x_4}\right).$$

Na osnovu uslova (1) zaključujemo da su izrazi (2) i (3) jednaki.

**12.27.** Dokazati da su prave

(1) $$(ar\pm bt)\,x+(br\mp at)\,y=r\,(a^2+b^2)$$

tangente kruga $x^2+y^2=r^2$ povučene iz tačke $(a, b)$ koja se nalazi van kruga, gde je $t$ dužina tangente od tačke $(a, b)$ do tačke dodira.

*Rešenje.* Potreban i dovoljan uslov da prava

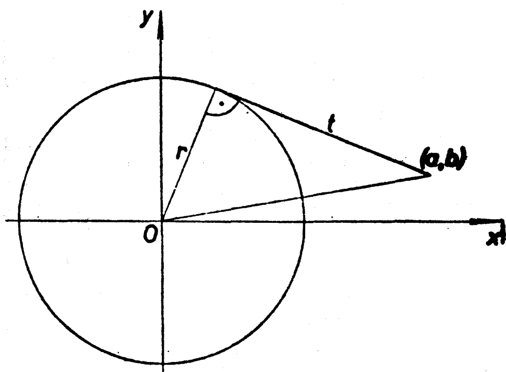
$$Ax+By+C=0$$

dodiruje krug

$$x^2+y^2=r^2$$

glasi

(2) $$C^2=r^2(A^2+B^2).$$




Proverimo da li je uslov (2) ispunjen za pravu (1).

Najpre imamo

$$r^2(A^2+B^2)=r^2\{(ar\pm bt)^2+(br\mp at)^2\}$$
$$=r^2(a^2+b^2)(r^2+t^2).$$

Kako je, s druge strane (videti sliku), $r^2+t^2=a^2+b^2$ uslov (2) zaista je ispunjen.

**12.28.** Odrediti $r$ tako da duž čije su krajnje tačke $(-1,2)$ i $(4,1)$ leži izvan kruga

$$(x-1)^2+(y-3)^2=r^2.$$

*Rezultat.* $0<r<7/\sqrt{26}$.

**12.29.** Promenljiva tetiva $MN$ jednog kruga stoji normalno na nepokretnoj tetivi $AB$ istog kruga.

Odrediti i ispitati geometrijsko mesto preseka pravih $AM$ i $BN$.

**12.30.** Odrediti i ispitati geometrijsko mesto sredina tetiva jednog kruga $C$ koje prolaze kroz utvrđenu tačku.

*Rešenje.* Neka su jednačine kruga i njegovih tetiva koje prolaze kroz tačku $A(a, b)$ redom

(1) $$x^2+y^2=r^2,\qquad y-b=m\,(x-a)\qquad (m \text{ parametar}).$$

Odavde se dobija, posle eliminacije $y$, jednačina

$$(1+m^2)\,x^2+2\,m\,(b-ma)\,x+(ma-b)^2-r^2=0$$

i neka su $x_1$ i $x_2$ njena rešenja.

Koordinate $(x, y)$ traženog geometrijskog mesta treba da ispunjavaju uslove

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\quad \text{i}\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Koristeći se Vièteovim formulama i drugom od jednačina (1), nalazi se

$$x = m\frac{ma-b}{1+m^2}, \quad y = \frac{b-ma}{1+m^2}.$$

Ako se $m$ eliminiše, dobija se jednačina

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

Ovaj krug je traženo geometrijsko mesto ako je $A$ u ili na krugu $C$, a deo ovog kruga ako se $A$ nalazi van kruga $C$.

**12.31.** Odrediti jednačinu skupa $S$ krugova koji prolaze kroz tačke $B(0, a)$ i $B'(0, b)$. Šta je skup preseka pravih $AB$ i $A'B'$, ako su $A$ i $A'$ tačke u kojima $x$-osa seče krugove $S$?

**12.32.** U jednoj ravni dati su krug $C$ i tačka $M$. Ako se jedno teme ravnostranog trougla nalazi u tački $M$, a drugo na periferiji kruga $C$, odrediti geometrijsko mesto trećeg temena ovog trougla.

**12.33.** Tačke $A, B, C, D$ jednog kruga poređane su u naznačenom redu. Ako su tačke $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sredine lukova $AB, BC, CD, DA$, prave $\alpha\gamma$ i $\beta\delta$ međusobno su normalne. Dokazati.

**12.34.** Dokazati da je geometrijsko mesto centara krugova, koji polove periferije dva fiksna kruga, prava.

**12.35.** Dokazati da sve normale krive

$$(1) \qquad x = \frac{2at}{1+t^2}, \quad y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \qquad (a = \text{const})$$

prolaze kroz jednu fiksnu tačku koju treba odrediti.

*Rešenje.* Stavimo li $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, dobijamo

$$(x = a\sin\theta, \quad y = a\cos\theta) \Leftrightarrow x^2+y^2 = a^2.$$

Prema tome, jednačine (1) određuju krug sa centrom u tački (0, 0). Ovim je tvrđenje dokazano.

**12.36.** Neka su $P_1$ i $P_2$ tačke preseka ma koje elipsine tangente sa elipsinim tangentama u temenima koja se nalaze na glavnoj osi elipse.

Dokazati da se duž $P_1P_2$ vidi iz jedne i iz druge žiže elipse pod pravim uglom.

*Rešenje.* Postavimo Dekartov pravougli koordinatni sistem tako da jednačina elipse glasi

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a>b).$$

Žiže elipse (1) su tačke $F_1(e, 0)$, i $F_2(-e, 0)$, gde je $e = \sqrt{a^2-b^2}$. Jednačina tangente elipse (1) u njenoj proizvoljnoj tački $(x_0, y_0)$ je

$$(2) \qquad \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Preseci prave (2) sa pravama $x=a$ i $x=-a$ su redom tačke:

$$P_1\left(a, \frac{b^2}{y_0}\left(1-\frac{x_0}{a}\right)\right) \quad \text{i} \quad P_2\left(-a, \frac{b^2}{y_0}\left(1+\frac{x_0}{a}\right)\right)$$

Koeficijenti pravaca duži $P_1F_1$ i $P_2F_1$ su redom:

$$k_1=\frac{b^2}{y_0}\,\frac{1-x_0/a}{a-e} \quad \text{i} \quad k_2=\frac{b^2}{y_0}\,\frac{1+x_0/a}{-a-e}.$$

Kako je $k_1 \cdot k_2=-1$, duži $P_1F_1$ i $P_2F_1$ čine pravi ugao. Zbog simetrije, isto tvrđenje važi i za žižu $F_2$.

**12.37.** Dat je skup elipsi $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ ($a=$const, $b$ promenljivo).

Dokazati da se tangente ovih elipsi, povučene u tačkama sa jednakim apscisama, seku u zajedničkoj tački koja se nalazi na $x$-osi.

Koristeći se ovom činjenicom, dati postupak za geometrijsku konstrukciju tangente elipse.

**12.38.** Ako se tačka $P$, koja se nalazi u ravni date elipse $E$, spoji sa žižom $F$ elipse i u $F$ podigne normala na pravu $PF$, tada se: ova normala, polara tačke $P$ i direktrisa elipse koja odgovara žiži $F$ seku u istoj tački.

Dokazati.

**12.39.** Neka su $A$ i $B$ tačke elipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$. Paralelno pravoj $OA$ povučena je jedna tangenta elipse koja dodiruje elipsu u tački $P$. Paralelno pravoj $OB$ povučena je jedna tangenta iste elipse koja dodiruje elipsu u tački $Q$. Ove dve tangente seku se u tački $T$.

Ispitati da li važi jednakost

$$TP/TQ=OA/OB \qquad (O \text{ koordinatni početak}).$$

**12.40.** Prava $L$ kroz tačku $M(\alpha, \beta)$ seče elipsu čija je jednačina $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ u tačkama $A$ i $B$. Tangente elipse u tim tačkama seku se u tački $C$.

Odrediti geometrijsko mesto tačaka $C$ kada prava $L$ rotira oko $M$.

**12.41.** Odrediti geometrijsko mesto ortogonalnih projekcija žiže jedne elipse na njenim tangentama.

**12.42.** Odrediti geometrijsko mesto tačaka $M$ tako da prava $PQ$ bude tangenta jedne elipse, gde su tačke $P$ i $Q$ ortogonalne projekcije tačke $M$ na osama simetrije date elipse.

**12.43.** Normala u tački $M(t)$ elipse $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ seče u tačkama $P$ i $Q$ one prečnike glavnog kruga $x^2+y^2=a^2$ elipse koji prolaze kroz tačke ovog kruga što imaju istu apscisu kao tačka $M$.

Izračunati koordinate tačaka $P$ i $Q$ kao funkcije ekcentrične anomalije tačke $M$, i odrediti geometrijska mesta tačaka $P$ i $Q$ kada $M$ opiše elipsu.

***Rešenje.*** Normala u tački $M(t)$ određena je jednačinom

(1) $$(a\sin t)x-(b\cos t)y-(a^2-b^2)\sin t\cos t=0.$$

Tačka $P$ je presek prave (1) i prave $x\sin t-y\cos t=0$.

Tačka $Q$ je presek prave (1) i prave $x\sin t+y\cos t=0$.

Koordinate tačaka $P$ i $Q$ redom su

$$\big((a+b)\cos t,\ (a+b)\sin t\big),\quad \big((a-b)\cos t,\ -(a-b)\sin t\big).$$

Kada $M$ opiše elipsu, tačke $P$ i $Q$ opisuju krugove koji se zovu Chaslesovi krugovi. Sredina duži $PQ$ je tačka $M$.

**12.44.** Tačkama $A_1$, $A_2$, $A_3$ jedne elipse odgovaraju tri potega čije su dužine:

$$FA_1=2,\quad FA_2=4,\quad FA_3=8\qquad (F \text{ jedna od žiža ove elipse})$$

i uz to su dati uglovi $(FA_1,\ FA_2)=\pi/2$, $(FA_1,\ FA_3)=\pi$.
Odrediti metričke elemente ove elipse.

***Rezultat.*** $a=16/3$, $b=16\sqrt{15}/15$, $p=16/5$, $e/a=\sqrt{10}/5$.

**12.45.** Odrediti geometrijsko mesto ortocentara trougla $MF_1F_2$, kada tačka $M$ opisuje datu elipsu čije su žiže tačke $F_1$ i $F_2$.

**12.46.** Tangenta i normala elipse $x^2+2y^2=54$, povučene u tački $M(6,\ 3)$, seku $x$-osu i $y$-osu u tačkama $T$, $T_1$, $N$, $N_1$. Dokazati:

1° Da obe žiže elipse leže na krugu koji prolazi kroz tačke $M$, $T_1$, $N_1$;

2° Da se taj krug i krug koji prolazi kroz tačke $M, N, T$ seku ortogonalno.

**12.47.** U proizvoljnoj tački $M$ elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ povučena je njena tangenta $t$ i takođe u tačkama $A_1(a,\ 0)$ $A_2(-a,\ 0)$. Tangenta $t$ seče druge dve tangente u tačkama $T_1$ i $T_2$. Dokazati:

1° Da je proizvod odsečaka $A_1T_1$ i $A_2T_2$ konstantan;

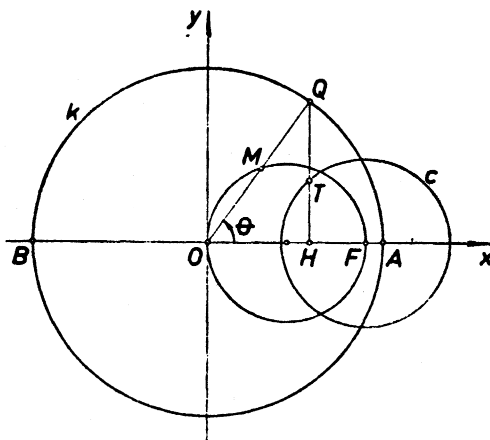
2° Da krug konstruisan nad duži $T_1T_2$ kao prečnikom prolazi kroz obe žiže elipse;

3° Da se prave $T_1F_1$ i $T_2F_2$ ($F_1$ i $F_2$ žiže) seku na normali elipse povučenoj u tački $M$.

**12.48.** Data je duž $AB$, čija je sredina tačka $O$, i tačka $F$ koja se nalazi na duži $AB$ između tačaka $O$ i $A$ $\left(\frac{1}{2}AB=a;\ OF=c\right)$.

Krug konstruisan nad $OF$ kao prečnikom i prava $OQ$, gde je $Q$ ma koja tačka kruga $k$ konstruisanog nad $AB$ kao prečnikom, seku se u tački $M$.

Odrediti geometrijsko mesto preseka $T$ normala iz $Q$ na $AB$ i kruga $c$ čiji je centar u $F$ i poluprečnik $MQ$ kada se tačka $Q$ kreće po krugu $k$.




***Rešenje.*** Sa slike je

$x = OH = OQ\cos\theta = a\cos\theta,$

$y^2 = HT^2 = FT^2 - FH^2 = MQ^2 - (OF - OH)^2$

$= (OQ - OM)^2 - (x - c)^2$

$= (a - c\cos\theta)^2 - (a\cos\theta - c)^2$

$= (a^2 - c^2)\sin^2\theta.$

Dakle,

$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta\quad (b = \sqrt{a^2 - c^2}).$

Ovo su parametarske jednačine elipse sa poluosama $a$ i $b$.

Konstrukcija tačaka $T$ može poslužiti kao jedan od načina konstrukcije elipse. Ovo je Altov način konstrukcije elipse.

**12.49.** Tangenta hiperbole $H$ u njenoj tački $P$ seče asimptote hiperbole $H$ u tačkama $Q$ i $R$. Dokazati da je $P$ sredina duži $QR$.

Ako je $O$ centar hiperbole $H$, i ako su $A$ i $B$ tačke u kojima normala hiperbole $H$ u tački $P$ seče ose simetrije hiperbole $H$, ispitati da li su tačke $O, A, B, Q, R$ konciklične.

**12.50.** U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu data je hiperbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Sečica paralelna $y$-osi seče ovu hiperbolu u tačkama $M_1$ i $M_2$. Prave $M_1F_1$ i $M_2F_2$ ($F_1$ i $F_2$ žiže hiperbole) seku se u tački $P$.

Odrediti geometrijsko mesto tačaka $P$ ako se sečica $M_1M_2$ kreće ostajući stalno paralelna $y$-osi.

***Rešenje.*** Ako je $M_1(p, q)$ jedna tačka hiperbole, tačka $M_2$ ima koordinate $(p, -q)$. Jednačine pravih $M_1F_1$ i $M_2F_2$ su redom

(1) $$y = \frac{q}{p-c}(x-c),\qquad y = \frac{-q}{p+c}(x+c)\qquad \left(c = \sqrt{a^2+b^2}\right).$$

Parametri $p$ i $q$ ispunjavaju takođe uslov

(2) $$p^2/a^2 - q^2/b^2 = 1.$$

Iz (1) se nalazi: $p = c^2/x$, $q = -cy/x$. Ako se ove vrednosti unesu u (2), dobija se

(3) $$\frac{x^2}{c^4/a^2} + \frac{y^2}{b^2c^2/a^2} = 1.$$

Treba još ispitati da li je traženo geometrijsko mesto tačke $P$ elipsa (3), ili samo njen deo.

**12.51.** Data je fiksna parabola $P$. Kraci pravog ugla, koji leži u ravni parabole $P$ i čije se teme poklapa sa temenom $O$ parabole $P$, seku ovu parabolu u dve tačke $M$ i $N$.

Dokazati da prava $MN$ rotira oko jedne fiksne tačke (koju treba odrediti), kada posmatrani ugao rotira oko svog temena $O$.

***Rezultat.*** Prava $MN$ rotira oko tačke koja se nalazi na osi simetrije parabole $P$ na odstojanju (u pravcu žiže) koje iznosi $4\cdot OF$ ($F$ žiža parabole).

**12.52.** Odrediti geometrijsko mesto tačaka $M$ iz koje se na parabolu mogu povući tangente koje zaklapaju ugao $\theta$

***Rešenje.*** Opštost se ne smanjuje ako posmatramo parabolu

(1) $$y=ax^2.$$

Jednačine tangenata parabole (1) u tačkama $A(x_1, ax_1^2)$ i $B(x_2, ax_2^2)$ glase

(2) $$y=2ax_1x-ax_1^2, \qquad y=2ax_2x-ax_2^2$$

Presečna tačka $M$ ovih pravih ima koordinate

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=ax_1x_2.$$

Da bi tangente (2) zaklapale ugao $\theta$, mora biti

(3) $$\frac{2a(x_1-x_2)}{1+4a^2x_1x_2}=\alpha \qquad (\alpha=\pm\operatorname{tg}\theta).$$

Kako je $y=ax_1x_2$, iz (3) dobijamo

(4) $$2a(x_1-x_2)=\alpha+4a\alpha y.$$

Iz (4) i $2x=x_1+x_2$ sleduje

$$x_1=x+\alpha y+\frac{\alpha}{4a}, \quad x_2=x-\alpha y-\frac{\alpha}{4a},$$

pa $y=ax_1x_2$ postaje

$$y=ax^2-a\alpha^2y^2-\frac{\alpha^2 y}{2}-\frac{\alpha^2}{16a}.$$

Ovo je traženo geometrijsko mesto, pri čemu je $\alpha=\pm\operatorname{tg}\theta$. Ako je $\theta=\pi/2$, geometrijsko mesto je prava $y=-\frac{1}{4a}$.

**12.53.** Na paraboli $y^2=4ax$ date su dve tačke $A(at_1^2, 2at_1)$ i $B(at_2^2, 2at_2)$. Ako prava $AB$ prolazi kroz žižu ove parabole dokazati da je $t_1t_2=-1$.

Prava koja prolazi kroz tačku $P(\alpha, \beta)$ i žižu $S$ parabole seče ovu parabolu u tačkama $Q$ i $R$. Dokazati jednakost

(1) $$\beta^2\cdot QR=4a\cdot SP^2.$$

***Rešenje.*** Jednačina prave kroz tačke $A(at_1^2, 2at_1)$ i $B(at_2^2, 2at_2)$ glasi

$$y-2at_1=\frac{2}{t_1+t_2}(x-at_1^2).$$

Ako ova prava prolazi kroz žižu $S(a, 0)$ parabole $y^2=4ax$, tada je

$$-2at_1=\frac{2}{t_1+t_2}(a-at_1^2), \quad \text{tj.} \quad t_1t_2=-1,$$

što je trebalo dokazati.

Jednačina prave kroz tačku $P(\alpha, \beta)$ i žižu $S(a, 0)$ je $y=\frac{\beta}{\alpha-a}(x-a)$.

Apscise $x_1$ i $x_2$ presečnih tačaka $Q$ i $R$ ove prave sa parabolom određene su jednačinom

$$\frac{\beta^2}{(\alpha-a)^2}x^2-\left[\frac{2a\beta^2}{(\alpha-a)^2}+4a\right]x+\frac{a^2\beta^2}{(\alpha-a)^2}=0.$$

Odavde je

(2) $$x_1+x_2=2a+\frac{4a(\alpha-a)^2}{\beta^2}.$$

S obzirom da je rastojanje od tačke na paraboli do žiže jednako rastojanju od te tačke do direktrise, za tačke $Q$ i $R$ je

$$SR=x_1+a, \quad SQ=x_2+a,$$

odakle sabiranjem dobijamo

$$QR=x_1+x_2+2a,$$

odnosno, prema (2),

$$QR=4a+4a\frac{(\alpha-a)^2}{\beta^2}.$$

Kvadrat rastojanja između tačaka $S(a, 0)$ i $P(\alpha, \beta)$ je $SP^2=(\alpha-a)+\beta^2$, pa se dobija

$$4a(SP)^2=4a\{(\alpha-a)^2+\beta^2\}.$$

Ovim smo dokazali jednakost (1).

**12.54.** U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxy$ odrediti jednačinu svih parabola čija je osa simetrije $x$-osa i čija se žiža nalazi u tački $O$. Ispitati koliko parabola iz ove familije prolaze kroz jednu tačku $M(x_0, y_0)$ i ako ih je više, odrediti ugao pod kojima se po dve i dve međusobno seku.

*Rešenje.* Neka je $x=a$ direktrisa tražene parabole. Tada je, na osnovu definicije parabole,

$$\sqrt{x^2+y^2}=|a-x| \Leftrightarrow y^2=a^2-2ax.$$

Kako je $x_0^2+y_0^2>0$, jednačina $a^2-2ax_0-y_0^2=0$ uvek ima dva realna različita rešenja po $a$. Prema tome, kroz svaku tačku $M(x_0, y_0)$, koja ne leži na $x$-osi, prolaze po dve parabole, čije su jednačine

$$y^2=a_1^2-2a_1x, \qquad y^2=a_2^2-2a_2x.$$

Odgovarajući koeficijenti pravaca tangenata u presečnoj tački $M$ su

$$k_1=-\frac{a_1}{y_0}, \qquad k_2=-\frac{a_2}{y_0}.$$

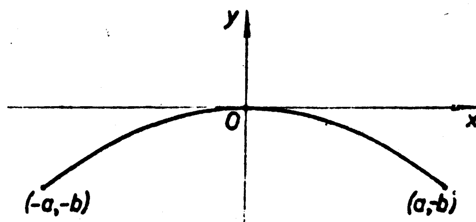
Kako je na osnovu Vièteovog pravila $a_1a_2=-y_0^2$, biće

$$k_1k_2=\frac{a_1a_2}{y_0^2}=-1,$$

pa se posmatrane parabole seku pod uglom $\pi/2$.

**12.55.** Ako luk mosta ima oblik parabole, odrediti odstojanje žiže do temena te parabole kada je raspon luka $2a$ i visina luka $b$.

*Rešenje.* Neka je Dekartov pravougli koordinatni sistem $Oxy$ izabran kao što je na slici naznačeno.




Jednačina parabole je

$$x^2=-2py \qquad (p>0).$$

Ova parabola prolazi kroz tačke $(a,-b)$, $(-a, -b)$, pa je $2p=a^2/b$.

Jednačina parabole čiji je nacrtani luk – luk mosta – glasi $x^2=-(a^2/b)y$.

Traženo žižno odstojanje je $a^2/(4b)$.

*Primedba.* Ako luk mosta ima eliptičan oblik, da li je dovoljno znati raspon i visinu luka, da bi se odredilo odstojane od temena do žiža elipse?

**12.56.** Dokazati da se krive

$$y^2-4x=8, \qquad y^2-2ay=4x$$

za svako $a$ ortogonalno seku u dve tačke.

**12.57.** Neka su prave $q_1$ i $q_2$ normalne na osi parabole $P$ i neka prava $q_1$ seče $P$ u tačkama $A, B$ a prava $q_2$ u tačkama $C, D$. Ako je $AA'=a$, $CA=c$, $A'D=b$ ($A'$ ortogonalna projekcija tačke $A$ na pravoj $CD$), odrediti žižno odstojanje parabole $P$ kao funkciju od $a$, $b$, $c$.

*Rešenje.* Ne umanjujući opštost problema, može se posmatrati parabola čija je jednačina $y^2=2px$. Ordinate tačaka $A$ i $D$, na osnovu datih uslova, su

$$y_A=\frac{b-c}{2} \qquad y_D=\frac{c+b}{2}$$

Iz jednačine parabole nalazi se

$$x_A=\frac{(c-b)^2}{8p} \qquad x_D=\frac{(c+b)^2}{8p}$$

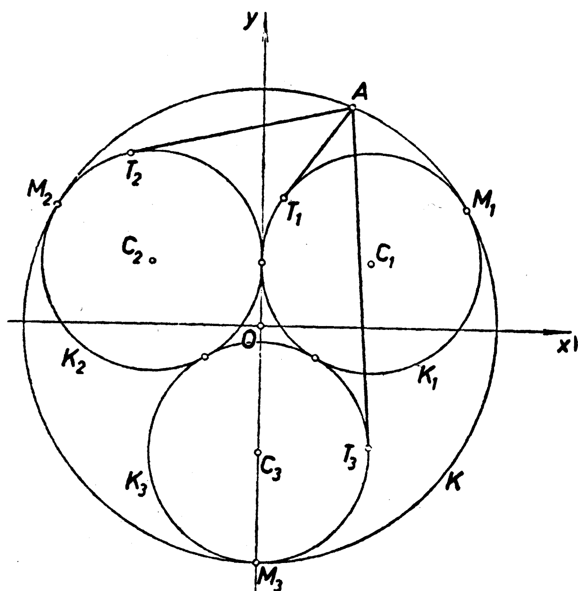
Kako je $AA'=x_D-x_A=a$, dobija se $p=\dfrac{bc}{2a}$

**12.58.** Tri jednaka kruga $K_1$, $K_2$, $K_3$ dodiruju se međusobno. Iz proizvoljne tačke četvrtog kruga $K$ koji dodiruje spolja krugove $K_1$, $K_2$, $K_3$ povučene su tangente na svaki od ova tri kruga.

Dokazati da je zbir dužina dve tangente jednak dužini treće.

*Rešenje.* Neka se centar kruga $K$ nalazi u koordinatnom početku Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema i neka $y$-osa prolazi kroz centar jednog od tri kruga $K_1$, $K_2$, $K_3$. Ako je $a$ rastojanje od koordinatnog početka do centara krugova $K_1$, $K_2$, $K_3$, onda su koordinate centara $C_1$, $C_2$, $C_3$ ovih krugova:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{a}{2}\right),\quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{a}{2}\right)$$
$$(0,\ -a).$$




Poluprečnik kruga $K$ je $R=a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i poluprečnik krugova $K_1$, $K_2$, $K_3$ je $r=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Izaberimo tačku $A(x_1, y_1)$ na krugu $K$ i neka se ona nalazi između tačaka $M_1$ i $M_2$ ($M_1$, $M_2$, $M_3$ tačke u kojima krugovi $K_1$, $K_2$, $K_3$ redom dodiruju krug $K$). Koordinate tačke $A$ ispunjavaju uslov

(1) $$x_1^2+y_1^2=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 a^2.$$

**Treba dokazati da je**

$$AT_1 + AT_2 = AT_3$$

**($T_1$, $T_2$, $T_3$ tačke dodira tangenata iz $A$ na krugove $K_1$, $K_2$, $K_3$), tj.**

$$\sqrt{(AC_1)^2 - r^2} + \sqrt{(AC_2)^2 - r^2} = \sqrt{(AC_3)^2 - r^2},$$

tj.

$$\sqrt{\left(x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(y_1 - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}a^2} + \sqrt{\left(x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(y_1 - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}a^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2 + (y_1 + a)^2 - \frac{3}{4}a^2}.$$

**Ako se primeni uslov (1) i poslednja jednakost kvadrira, dobija se**

(2) $$2\sqrt{[(2+\sqrt{3})a - y_1]^2 - 3x_1^2} = 4y_1 - (2+\sqrt{3})a.$$

**Desna strana jednakosti (2) je pozitivna s obzirom na to da se tačka $A$ nalazi između $M_1$ i $M_2$, jer ordinate tačaka $M_1$ i $M_2$ su $(2+\sqrt{3})\frac{a}{4}$, te je $y_1$ veće od te vrednosti.**

**Prema tome, jednakost (2) možemo kvadrirati, posle čega se dobija**

$$x_1^2 + y_1^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 a^2.$$

**To je jednakost koju je trebalo dokazati.**

## HILBERTOVO I KOLMOGOROVLJEVO GLEDIŠTE O MATEMATICI

Hilbert je mišljenja da matematičari mogu vladati celokupnom matematikom[1]. Tako on kaže:

»Ukoliko se dalje razvija matematička teorija, utoliko skladnija i jednostavnija postaje njena struktura, utoliko se otkriva više neočekivanih veza između ranije nepovezanih oblasti nauke. Tako se i jedinstveni karakter matematike ne gubi usled njenog porasta, već postaje jasniji i očigledniji... Svaki stvarni napredak nauke ide uporedo s otkrićem rigoroznijih i prostijih metoda, koje olakšavaju shvatanje starih teorija i odstranjuju potrebu starih komplikovanih dokaza.«

U vezi sa ovim A. N. Kolmogorov konstatuje[2]:

— Pravilno postavljeno uopštavanje u matematici dovodi ne do toga da se ona otežava novim komplikovanim i suviše apstraktnim teorijama, već da se ujedine i uproste stare, podvojene teorije.

— Stvarna opasnost za dalji naučni progres postaje sve veće specijaliziranje matematičara, od kojih sada svaki obično potpuno vlada samo malom oblasti matematike, vezanom sa pravcem njegovih ličnih istraživanja.

[1] *Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens*, tenu a Paris du 6 au 12 août 1900; Paris, 1902, p. 114.

[2] Videti njegov vrlo lep prikaz o savremenoj organizaciji matematičkih istraživanja u članku Matematika koji je objavljen u Sovjetskaja enciklopedija, Moskva, tom 38, 1938, stupci 359—402, specijalno str. 394—398.

# 13. RAZNI ZADACI

**13.1.** Izvestan broj knjiga treba spakovati u pakete. Ako bi se knjige pakovale po 4 u paket preostala bi jedna. Ako bi se pakovale po 5 opet bi preostala jedna. Ako bi se pakovale po 6 takođe bi preostala jedna. Međutim ako bi se pakovale po 7 ne bi preostala ni jedna. Koliko je najmanje bilo knjiga?

**13.2.** Jedan udžbenik algebre, dva udžbenika geometrije i dva udžbenika trigonometrije koštaju 210 dinara. Tri udžbenika algebre, jedan udžbenik geometrije i jedan udžbenik trigonometrije koštaju 230 dinara. Koliko koštaju jedan udžbenik geometrije i jedan udžbenik trigonometrije zajedno?

**13.3.** Iz mesta $A$ u mesto $B$ pošao je pešak brzinom 4 km/h. Posle izvesnog vremena pošao je iz $A$ drugi pešak. Treći pešak pošao je takođe iz $A$ kasnije od drugog za onoliko koliko je drugi pošao kasnije od prvog pešaka. Treći pešak je stigao drugog na polovini puta između $A$ i $B$, i posle toga su išli zajedno brzinom koja je jednaka aritmetičkoj sredini brzina kojima su se do tada kretali. Sva tri pešaka su istovremeno stigli u $B$. Kojom se brzinom u početku kretao drugi pešak ako se treći pešak u početku kretao brzinom 6 km/h?

**13.4.** U prodavnici je bilo 6 sanduka sa jabukama sa težinama od 15 kg, 16 kg, 18 kg, 19 kg, 20 kg i 31 kg. Dva kupca su kupili 5 sanduka, tako da je jedan uzeo dva puta više jabuka nego drugi. Koji sanduk je ostao neprodat?

**13.5.** Izvesnu sumu novca mogućno je zameniti čekovima od 3 i 5 dinara na 57 različitih načina. Kolika je ta suma?

**13.6.** Od kockica ivice 1 cm složen je pravougli paralelepiped, čije su ivice $a$ cm, $b$ cm, $c$ cm ($a$, $b$, $c$ prirodni brojevi), pa je ovaj pravougli paralelepiped obojen spolja crveno.

Koliko kockica od kojih je sagrađen paralelepiped imaju:

1° samo tri strane obojene crveno;

2° samo dve strane obojene crveno;

3° samo jednu stranu obojenu crveno;

4° nijednu stranu obojenu crveno;

5° bar jednu stranu obojenu crveno?

***Rešenje.*** Neka je $a>1$, $b>1$, $c>1$. Tada

1° samo tri strane obojeno crveno imaju 8 kockica koje se nalaze u rogljevima paralelepipeda;

2° samo dve obojene strane imaju kockice koje se nalaze na ivicama paralelepipeda isključujući one u rogljevima. Njihov broj je

$$4(a-2)+4(b-2)+4(c-2);$$

3° samo jednu stranu obojenu crveno imaju kockice čija se samo jedna strana nalazi na površini paralelepipeda. Njihov broj dobijamo kada od broja svih kockica na površini paralelepipeda oduzmemo broj kockica sa po dve ili tri obojene strane. To iznosi kockica:

$$2((a-2)(b-2)+(b-2)(c-2)+(c-2)(a-2));$$

4° nijednu obojenu stranu imaju

$$(a-2)(b-2)(c-2)$$

kockica koje se nalaze u unutrašnjosti paralelepipeda;

5° bar jednu obojenu stranu imaju

$$abc-(a-2)(b-2)(c-2)$$

kockica. Ovaj broj dobijamo kada od ukupnog broja kockica oduzmemo kockice koje nemaju obojenih strana.

Ako je $a=1$, $b>1$, $c>1$, odnosno $a>1$, $b=1$, $c>1$, odnosno $a>1$, $b>1$, $c=1$, tada:

1° samo tri strane obojeno crveno imaju $2(b+c-4)$ kockica, odnosno $2(a+c-4)$, odnosno $2(a+b-4)$;

2° samo dve obojene strane imaju $(b-2)(c-2)$ kockica, odnosno $(a-2)(c-2)$, odnosno $(a-2)(b-2)$;

3° nijedna kockica nema samo jednu stranu obojenu crveno;

4° nema kockica bez obojenih strana;

5° bar jednu obojenu stranu imaju $abc$ kockica.

Ako je $a=1$, $b=1$, $c\geqq 1$, ili $a=1$, $b\geqq 1$, $c=1$, ili $a\geqq 1$, $b=1$, $c=1$, tada na pitanja 1°, 2°, 3°, 4° odgovor je da takvih kockica nema; dok na pitanje 5° odgovor glasi: bar jednu obojenu stranu ima $c$, ili $b$, ili $a$ kockica.

*Generalizacija.* Posle bojenja pravouglog paralelepipeda, ukloniti sve kockice obojene crveno, pa novo dobijeni pravougli paralelepiped opet obojiti spolja crveno. Ovaj postupak ponoviti sve dotle dok je to mogućno.

Odgovoriti u ovom slučaju na pitanja od 1° do 5° koja su gore postavljena.

**13.7.** U urni se nalazi 100 raznobojnih kuglica: 28 crvenih, 20 zelenih, 12 žutih, 20 plavih, 10 belih i 10 crnih. Koliko najmanje kuglica treba izvući iz urne da bi među njima bilo 15 kuglica iste boje?

**13.8.** Dokazati da jednakost $xy(x^2+y^2)=zu(z^2+u^2)$ smenom

$$x=a+b+c+d,\quad y=a+b-c-d,\quad z=a-b+c-d,\quad u=a-b-c+d,$$

postaje $ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$.

**13.9.** Dokazati formule:

$$\frac{a+b+|b-a|}{2}=\max(a,\ b)\qquad \frac{a+b-|b-a|}{2}=\min(a,\ b)\qquad (a,\ b \text{ realni brojevi}).$$

**13.10.** Dokazati formule:

$$\frac{|a+b|+|a-b|}{2}=\max(|a|,\ |b|)\qquad \frac{|a+b|-|a-b|}{2}=(\operatorname{sgn}(ab))\min(|a|,\ |b|)\qquad (a \text{ i } b \text{ realni brojevi}).$$

**13.11.** Dokazati formule:

$$\frac{|a+b|+|a-b|}{2ab}=\frac{\operatorname{sgn}(ab)}{\min(|a|,|b|)}$$

$$\frac{|a+b|-|a-b|}{2ab}=\frac{1}{\max(|a|,|b|)}$$

($a$ i $b$ realni brojevi i $ab\neq 0$).

**13.12.** Dokazati identitet

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}.$$

**13.13.** Uprostiti izraz

$$E=\frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}.$$

***Rezultat.*** $E=-3$ $(a\neq b\neq c\neq a)$.

**13.14.** Ako je

$$x^2-yz=a,\quad y^2-zx=b,\quad z^2-xy=c,$$

dokazati da je

$$ax+by+cz=(a+b+c)(x+y+z).$$

**13.15.** Ako je $a+b+c=0$ i $a^2+b^2+c^2=1$, izračunati $a^4+b^4+c^4$.

***Rezultat.*** 1/2.

**13.16.** Ispitati kada je zbir kubova tri uzastopna prirodna broja deljiv sa 18.

**13.17.** Naći četvorocifreni broj čije su dve prve cifre jednake, dve krajnje cifre jednake i koji je kvadrat celog broja.

**13.18.** Odrediti deset uzastopnih prirodnih brojeva tako da svi budu složeni brojevi.

**13.19.** Naći $n$-ti član niza brojeva $a_n$ ako se zna da je $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=6$ i da za svaki prirodan broj $n$ važi

$$a_{n+3}-3a_{n+2}+3a_{n+1}-a_n=0.$$

**13.20.** Odrediti formulu koja izražava zbir

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$$

u zavisnosti od $n$.

**13.21.** Ako je prirodan broj $\overline{62ab427}$ deljiv sa 99, odrediti $a$ i $b$.

**13.22.** Ako je zbir $a+b$ dva cela broja deljiv neparnim brojem $n$, dokazati da je $a^n+b^n$ deljivo sa $n^2$. Da li je ovo tvrđenje tačno za parno $n$?

**13.23.** Dokazati da nijedna od cifara 2, 4, 7, 9 nije poslednja cifra broja $1+2+3+\cdots+n$, gde je $n$ prirodan broj.

**13.24.** Dokazati da je

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{200}.$$

**13.25.** Trojka brojeva 1, 2, 3 ima osobinu da je proizvod bilo koja dva od njih povećan za 1 deljiv sa trećim. Odrediti sve trojke prirodnih brojeva koji imaju ovu osobinu.

**13.26.** Broj 35! jednak je

$$10333147966386144929{*}66651337523200000000.$$

Koji broj treba da stoji umesto *?

**13.27.** Odrediti sve petocifrene brojeve oblika $\overline{34x5y}$ koji su deljivi sa 36.

**13.28.** Odrediti sve cele brojeve koji se, kada im se izostavi prva cifra, smanjuju 57 puta.

**13.29.** Odrediti četvorocifreni broj $\overline{1xyz}$ ako su među brojevima $\overline{xz}$, $\overline{yx}+1$, $\overline{zy}-2$ dva deljiva sa sedam i ako je $x+2y+z=29$.

**13.30.** Zna se da je $x+\frac{1}{x}$ ceo broj. Dokazati da je i $x^8+\frac{1}{x^8}$ takođe ceo broj.

**13.31.** Dokazati da se svaki broj

$$(1+\sqrt{2})^n \qquad (n \text{ prirodan broj})$$

može predstaviti u obliku

$$a+b\sqrt{2} \qquad (a,\ b \text{ prirodni brojevi}),$$

kao i da je

$$(1+\sqrt{2})^{-n}=(-1)^n a+(-1)^{n+1} b\sqrt{2}.$$

**13.32.** Dokazati da je broj $\sqrt{2}+\sqrt{17}$ iracionalan.

***Dokaz.*** Pretpostavimo da je $\sqrt{2}+\sqrt{17}=R$ ($R$ racionalan broj).
Odavde sleduje

$$\sqrt{17}=R-\sqrt{2} \Rightarrow 15=R^2-2R\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}=\frac{R^2-15}{2R}.$$

Ovim smo došli do apsurda, te je broj $\sqrt{2}+\sqrt{17}$ zaista iracionalan.

**13.33.** Dokazati da je broj $n=r_1 r_2 \ldots r_k r_1 r_2 \ldots r_k$ od $2k$ cifara ($r_1, \ldots, r_k$ su cifre tog broja), gde je $k=3^\nu$ ($\nu=1, 2, \ldots$), deljiv sa 7, 11 i 13.

***Rešenje.*** Broj $n$ može se predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} n&=r_1 10^{2k-1}+r_2 10^{2k-2}+\cdots+r_k 10^k+r_1 10^{k-1}+r_2 10^{k-2}+\cdots+r_k \\ &=r_1 10^{k-1}(10^k+1)+r_2 10^{k-2}(10^k+1)+\cdots+r_k(10^k+1) \\ &=(10^k+1)(r_1 10^{k-1}+r_2 10^{k-2}+\cdots+r_k). \end{aligned}$$

Dokažimo matematičkom indukcijom da je broj $10^{3^\nu}+1$ $(\nu=1, 2, \ldots)$ deljiv sa $7\cdot 11\cdot 13$ Pretpostavimo da je dati broj deljiv sa $7\cdot 11\cdot 13$ za neko $\nu$, tj.

$$10^{3^\nu}+1=7\cdot 11\cdot 13\, m \text{ ($m$ prirodan broj).}$$

Tada je

$$10^{3^{\nu+1}}+1=(10^{3^\nu})^3+1=(10^{3^\nu}+1)(10^{2\cdot 3^\nu}-10^{3^\nu}+1)=7\cdot 11\cdot 13\, M,$$

gde je $M$ prirodan broj. Prema tome, broj $10^{3^{\nu+1}}+1$ deljiv je sa $7\cdot 11\cdot 13$ ako je to slučaj sa brojem $10^{3^\nu}+1$; kako je poslednji broj deljiv sa $7\cdot 11\cdot 13$ za $\nu=1$, tvrđenje je dokazano. Time je dokazano da je broj $n$ deljiv sa $7\cdot 11\cdot 13$.

**13.34.** Naći dva prirodna broja čiji je zbir 589 a količnik njihovog najmanjeg zajedničkog sadržaoca i najvećeg zajedničkog delioca je 13.

**13.35.** Dokazati da se izraz $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{243}$ može napisati u obliku $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}$, gde su $a$ i $b$ celi brojevi za koje je $3a^2-2b^2=1$.

**13.36.** Dokazati da se među deset uzastopnih prirodnih brojeva uvek nalazi bar jedan a najviše četiri broja koji nisu deljivi ni sa jednim od brojeva 2, 3, 5, 7.

**13.37.** Na koliko se načina može skup od $n$ elemenata podeliti na dva skupa?

**13.38.** Dokazati da je proizvod dva faktora, od kojih je svaki zbir kvadrata dva cela broja, jednak zbiru kvadrata dva cela broja.

**13.39.** Dat je niz brojeva 13, 25, 43, ... čiji je $n$-ti član definisan izrazom

$$a_n=3(n^2+n)+7.$$

Dokazati da taj niz ima sledeće osobine:

1° između svakih pet uzastopnih članova niza jedan i samo jedan deljiv je sa 5;

2° nijedan član niza nije kub celog broja.

**13.40.** Za koje vrednosti $x$ postoji

$$(\log(\log(\log(\log(\log(\log x)^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2}.$$

**13.41.** Odrediti četvorocifren broj $\overline{xyzt}$, koji je potpun kub i koji ima osobine da njegove cifre, koje su različite, zadovoljavaju jednakosti $2x=y-z$ i $y=t^2$.

**13.42.** Dokazati sledeća dva pravila za deljivost sa sedam:

a) Broj $N$ je deljiv sa 7 ako i samo ako je deljiv sa 7 broj $P$ formiran na sledeći način: Množimo prvu cifru (sleva) broja $N$ sa 3 i rezultatu dodajemo drugu cifru. Dobijeni broj množimo sa 3 i rezultatu dodajemo treću cifru, itd. dok ne iscrpimo sve cifre.

b) Broj $N$ je deljiv sa 7 ako i samo ako je deljiv sa 7 broj $Q$ formiran na sledeći način: Množimo poslednju cifru broja $N$ sa 5 i rezultatu dodajemo treću cifru s kraja, itd. dok ne iscrpimo sve cifre.

**13.43.** Koje cifre treba staviti umesto nula na trećem i petom mestu u broju 3000003, da bi se dobio broj deljiv sa 13?

**13.44.** Fabrika ekspeduje robu u paketima od 3 i 5 kg. Dokazati da je na taj način mogućno ekspedovati bilo koji ceo broj kilograma veći od 7. Da li je mogućno u ovom zadatku zameniti date brojeve sa drugim brojevima?

**13.45.** Odrediti prirodan broj $n$ ako se zna da je zbir

$$1+2+3+\cdots+n$$

trocifreni broj čije su sve cifre jednake.

**13.46.** Od cifara 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 formirani su svi mogući četvorocifreni brojevi sa različitim ciframa. Odrediti zbir tih brojeva.

**13.47.** Jedna beskonačna opadajuća geometrijska progresija ima član jednak $\frac{1}{2}$. Zbir svih članova koji se nalaze ispred ovog člana je 60 a zbir svih članova koji se nalaze iza ovoga člana je $\frac{1}{4}$. Odrediti rang ovog člana, tj. ako je $a_n = \frac{1}{2}$ naći $n$.

**13.48.** Dve beskonačne opadajuće geometrijske progresije imaju osobinu da je prvi član prve progresije jednak količniku druge progresije i količnik prve progresije jednak je prvom članu druge progresije. Odnos zbira prve progresije prema zbiru kvadrata svih njenih članova je 8/3. Takav isti odnos kod druge progresije je 9/2. Naći zbir svake od tih progresija.

**13.49.** Ako u nizu realnih brojeva

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$$

izostavimo jedan element, dokazati da se broj mena u tome nizu ne povećava.

*Napomena.* Ako je $\operatorname{sgn} a_k \neq \operatorname{sgn} a_{k+1}$ $(a_k, a_{k+1} \neq 0)$, kaže se da brojevi $a_k$ i $a_{k+1}$ čine *menu*; u ostalim slučajevima kaže se da brojevi $a_k$ i $a_{k+1}$ ne čine *menu*.

*Dokaz.* Izostavimo element $a_k$ i neka su $a_\nu$ i $a_\mu$ njegovi najbliži elementi sleva i zdesna koji su različiti od nule.

Ako je $a_\nu a_\mu < 0$, izostavljanjem elementa $a_k$ niti se gubi niti dobija neka mena.

Ako je $a_\nu a_\mu > 0$ i $a_\nu a_k > 0$, takođe niti se gubi niti dobija neka mena.

Ako je $a_\nu a_\mu > 0$ i $a_\nu a_\mu < 0$, gube se dve mene.

Ovim je dokaz završen.

**13.50.** Dokazati:

1° Ako se između dva susedna elementa $a_\nu$ i $a_\mu$ datog niza umetne nov element koji je jednak nuli ili nov element $a_\lambda$ koji ima isti znak kao bar jedan od elemenata $a_\nu$ i $a_\mu$, broj mena se ne menja;

2° Niz

$$a_0, a_0+a_1, a_1+a_2, \ldots, a_{n-1}+a_n, a_n$$

nema više mena od niza

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n.$$

**13.51.** Neka su $a$ i $b$ dva različita prirodna broja. Aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu ovih brojeva redom označimo sa

$$A_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad G_1 = \sqrt{ab}, \qquad H_1 = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Uopšte, aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu brojeva $A_n$, $G_n$, $H_n$ označimo sa $A_{n+1}$, $G_{n+1}$, $H_{n+1}$, tj.

$$A_{n+1} = \frac{A_n + G_n + H_n}{3}, \quad G_{n+1} = \sqrt[3]{A_n G_n H_n}, \quad H_{n+1} = \frac{3}{\frac{1}{A_n}+\frac{1}{G_n}+\frac{1}{H_n}}.$$

Dokazati Labutinove jednakosti:

$$G_n = G_1, \quad A_n H_n = G_n^2.$$

**13.52.** Rešiti jednačinu

$$|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4.$$

**13.53.** Izraz $x^8 + x^4 + 1$ predstaviti u obliku proizvoda 4 faktora.

**13.54.** Za koje se vrednosti $k$ polinom

$$(x^2 - 12xy - y^2 + 2x + 1) + k(x^2 + 2y^2 - x - 2)$$

može predstaviti kao proizvod dva linearna faktora po $x$ i $y$?

**13.55.** Odrediti $a$ i $b$ tako da polinom $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 4$ đude potpun kvadrat jednog kvadratnog trinoma $p(x)$.

*Uputstvo.* $p(x)$ ima oblik $\pm x^2 + rx \pm 2$, gde dolaze u obzir sve kombinacije znakova + i —. Ostaje da se odredi parametar $r$.

**13.56.** Rešiti jednačinu $m! + 12 = n^2$, pri čemu su $m$ i $n$ prirodni brojevi.

**13.57.** Rešiti jednačinu

$$2^{41} = 2 + \sum_{n=0}^{39} \log_{10} x^{2^n}.$$

**13.58.** Rešiti jednačinu $(x^2 + 6x - 4)(x^2 + 6x - 3) = 12$.

**13.59.** Data je jednačina $x^2 + px + 1 = 0$ čiji su koreni $x_1$, $x_2$.

a) Sastaviti kvadratnu jednačinu čiji su koreni $y_1$ i $y_2$ dati sa

$$y_1 = x_1(1 - x_1), \quad y_2 = x_2(1 - x_2).$$

b) Odrediti parametar $p$ tako da koreni tako dobijene jednačine leže u intervalu $(-2, 1)$.

**13.60.** Rešiti sistem

$$\begin{aligned} &x_1 x_2 \cdots x_n = 1, \\ &x_1 - x_2 x_3 \cdots x_n = 1, \\ &x_1 x_2 - x_3 x_4 \cdots x_n = 1, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &x_1 x_2 \cdots x_{n-1} - x_n = 1. \end{aligned}$$

**13.61.** Ako je $a > b > 0$, dokazati da je $a + \frac{1}{(a-b)\,b} \geqq 3$.

**13.62.** Ako kvadratna jednačina

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sa celobrojnim koeficijentima ima racionalan koren, dokazati da je bar jedan od brojeva $a$, $b$, $c$ paran.

**13.63.** Ako funkcija $ax^2 + bx + c$ ima celobrojnu vrednost za svaku celobrojnu vrednost promenljive $x$, dokazati da su tada brojevi $2a, a+b, c$ celi i obrnuto.

**13.64.** Dokazati da polinom petog stepena

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 6$$

nije jednak proizvodu dva polinoma nižeg stepena sa celobrojnim koeficijentima.

**13.65.** Ako je $a > 0$, $b > 0$, $abc = 1$, dokazati da je $a + b + c \geqq 3$.

**13.66.** Odrediti uslov koji treba da ispunjavaju koeficijenti trinoma $x^2 + mx + n$ i $x^2 + px + q$ da bi između korena svakog od tih trinoma ležao koren drugog trinoma. Slova $m$, $n$, $p$, $q$ označavaju ovde realne brojeve.

**13.67.** Koje uslove treba da zadovoljavaju realni brojevi $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ da bi polinom drugog stepena

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

bio proizvod dvaju polinomâ prvog stepena sa realnim koeficijentima?

**13.68.** Dokazati da je polinom

$$P(x) = nx^{n+2} - (n+2)\,x^{n+1} + (n+2)\,x - n$$

deljiv sa $(x-1)^3$.

**13.69.** Kvadratni trinom $f(x) = ax^2 + bx + c$ je takav da jednačina $f(x) = x$ nema realnih korena. Dokazati da jednačina $f(f(x)) = x$ takođe nema realnih korena.

**13.70.** Odrediti sve funkcije $f$ za koje važi jednakost

$$f(x) f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1$$

za svako realno $x$ i $y$.

**13.71.** Odrediti $f(x)=ax^2+bx+c$ tako da budu ispunjeni uslovi:

$$(x-1)^2 \leqq f(x) \leqq x^2-x \quad (x \geqq 1);$$

$$\min|f(x)|=4 \quad (-2 \leqq x \leqq -1).$$

**13.72.** Šta iskazuju nejednakosti:

$1°$ $|a-b|+|b-c|+|c-a|>0$, $2°$ $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$

o brojevima $a$, $b$, $c$?

**13.73.** Šta kazuje nejednakost $|x|+|y|+|z|>0$, a šta nejednakost $xyz \neq 0$ o brojevima $x$, $y$, $z$?

Šta kazuju nejednakosti $\sum_{k=1}^{n}|x_k|>0$ ili $\prod_{k=1}^{n} x_k \neq 0$?

**13.74.** Ako postoje jednakosti

(1) $$x+y+z=xyz, \quad x^2=yz \quad (xyz \neq 0),$$

dokazati da $y$ i $z$ imaju realne vrednosti ako i samo ako je $x^2 \geqq 3$.

***Rešenje.*** Jednakostima (1) može se dati oblik

$$y+z=x^3-x, \qquad yz=x^2.$$

Prema tome $y$ i $z$ su koreni kvadratne jednačine po $t$:

$$t^2-(x^3-x)\,t+x^2=0.$$

Ova jednačina ima realne korene samo ako je $(x^3-x)^2-4\,x^2 \geqq 0 \Rightarrow x^2 \geqq 3$.

**13.75.** Ako tri realna broja $x$, $y$, $z$ ispunjavaju uslove

(1) $$x+y+z=5, \quad yz+zx+xy=8,$$

dokazati da svaki od njih leži u intervalu $(1, 7/3)$.

***Rešenje.*** Jednakosti (1) mogu se predstaviti u obliku

$$y+z=5-x, \qquad yz=8-(5-x)\,x.$$

Prema tome, $y$ i $z$ su rešenja kvadratne jednačine po $t$

$$t^2-(5-x)\,t+(x^2-5\,x+8)=0.$$

Ova jednačina ima realne korene ako i samo ako je $1 \leqq x \leqq 7/3$.
S obzirom da su jednakosti (1) simetrične u odnosu na sve tri promenljive, zaključuje se

$$1 \leqq y \leqq 7/3, \qquad 1 \leqq z \leqq 7/3.$$

**13.76.** Koje uslove treba da ispunjavaju $x$ i $y$ da bi važio sistem nejednakosti

$$x>y, \; \frac{x}{x+1}>\frac{y}{y+1}?$$

***Odgovor.*** $x>y>-1$ ili $y<x<-1$.

**13.77.** Dokazati $x^2+y^2 \leqq 2 \Rightarrow |x+y| \leqq 2$.

**13.78.** Dokazati nejednakost

$$\log_{b+c} a^2 + \log_{c+a} b^2 + \log_{a+b} c^2 \geqq 3,$$

pri čemu su $a$, $b$, $c$ realni brojevi koji nisu manji od 2.

**13.79.** Ako su $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ pozitivni brojevi, dokazati da je

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2 \geqq 4\,(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1).$$

**13.80.** Dato je 10 realnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Zna se da je razlika između najvećeg i najmanjeg od njih jednaka 1.

Kolika najveća odnosno najmanja može da bude razlika između najvećeg i najmanjeg od brojeva

$$x_1, \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \ldots, \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}?$$

**13.81.** Nacrtati krivu

$$(C) \qquad |x^2+y^2-1|+|y^2-2x|=1.$$

***Rešenje.*** Posebno ćemo ispitati četiri moguća slučaja:

$1°\ x^2+y^2-1\geqq 0,\ y^2-2x\geqq 0;\qquad 2°\ x^2+y^2-1\geqq 0,\ y^2-2x\leqq 0;$

$3°\ x^2+y^2-1\leqq 0,\ y^2-2x\geqq 0;\qquad 4°\ x^2+y^2-1\leqq 0,\ y^2-2x\leqq 0.$

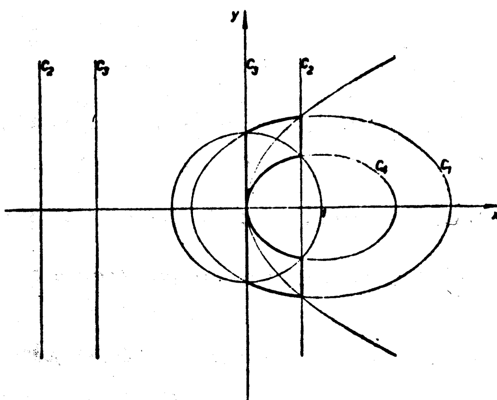
Jednačina krive $(C)$, uz uslove 1°, 2°, 3°, 4°, dobija redom sledeće oblike;

$(C_1)\quad x^2+2y^2-2x-2=0;$

$(C_2)\quad x^2+2x-2=0;$

$(C_3)\quad x^2+2x=0;$

$(C_4)\quad x^2+2y^2-2x=0.$




Jednačine $(C_1)$ i $(C_4)$ definišu dve koncentrične elipse koje su na slici nacrtane. Centar ovih elipsi je u tački $(1, 0)$. Njihove ose simetrije su: $y=0$, $x=1$. Jednačine $(C_2)$ i $(C_3)$ definišu četiri prave paralelne $y$-osi.

*Slučaj* 1° Krivoj $(C)$ pripadaju samo oni delovi elipsine periferije $(C_1)$ koji se nalaze u isti mah van kruga $x^2+y^2=1$ i van parabole $y^2=2x$ (oblast u kojoj se ne nalazi žiža). Ti lukovi su crnje izvučeni na slici. Krajnje tačke ovih lukova takođe pripadaju krivoj $(C)$.

*Slučaj* 2° Krivoj $(C)$ pripadaju oni odsečci pravih $x=-1\pm\sqrt{3}$ koji se nalaze u isti mah van kruga $x^2+y^2=1$ i u paraboli $y^2=2x$. To su dva odsečka prave $x=-1+\sqrt{3}$: prvi između tačaka $(a, b)$ i $(a, c)$ i drugi između tačaka $(a,-b)$ i $(a,-c)$, gde je:

$$a=-1+\sqrt{3}, \qquad b=\sqrt{2\sqrt{3}-3}, \qquad c=\sqrt{2(\sqrt{3}-1)}.$$

*Slučaj* 3° Krivoj $(C)$ pripadaju oni odsečci pravih $x=0$, $x=-2$ koji se nalaze jednovremeno u krugu $x^2+y^2=1$ i van parabole $y^2=2x$. To je odsečak $y$-ose od tačke $(0,-1)$ do tačke $(0, 1)$.

*Slučaj* 4° Najzad krivoj $(C)$ pripada onaj luk elipse $(C_4)$ koji se istovremeno nalazi u krugu $x^2+y^2=1$ i u paraboli $y^2=2x$. Na slici je taj luk crnje izvučen. Krajnje tačke tog luka takođe pripadaju krivoj $(C)$.

**13.82.** Nacrtati krivu čije su parametarske jednačine

(1) $$x=|t+1|, \qquad y=|t^2-1|,$$

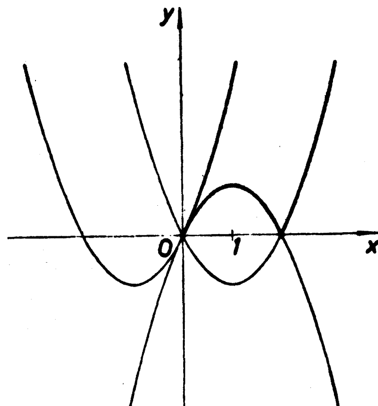
gde $t$ uzima sve realne vrednosti.

*Rešenje.* Umesto (1) možemo pisati:

(2) $x=-t-1, \quad y=t^2-1, \quad t\in(-\infty,-1]$;

(3) $x=t+1, \quad y=-t^2+1, \quad t\in[-1,+1]$;

(4) $x=t+1, \quad y=t^2-1, \quad t\in[1,+\infty)$.




Ako se iz (2), (3), (4) eliminiše $t$, dobija se redom

$y=(x+1)^2-1 \quad (x\geqq 0)$,

$y=-(x-1)^2+1 \quad (x\in[0, 2])$;

$y=(x-1)^2-1 \quad (x\geqq 2)$.

To su, u stvari, segmenti lukova tri parabole.

Jednačinama (1) data je funkcija $y(x)$ koja je definisana samo za $x\geqq 0$. Ta funkcija je multiformna (videti sliku na kojoj je kriva (1) izvučena polumasno).

**13.83.** Nacrtati krive:

1° $|y+|y||=x^2$; 2° $y|y|=x$; 3° $|y|=x^2+|x|$; 4° $x|x|+y|y|=1$.

**13.84.** Nacrtati krive:

1° $|y^2-2x|+|x^2-2y|=1$; 2° $|x^2+y^2-1|-|y^2-2x|=1$;
3° $|x+y-1|+|x^2+y^2-1|=1$; 4° $|x+y-1|+|y+x^2|=1$.

**13.85.** Na svakoj strani paralelograma uzeta je po jedna tačka. Površina četvorougla sa temenima u tim tačkama jednaka je polovini površine paralelograma. Dokazati da je bar jedna dijagonala paralelograma paralelna sa jednom stranom četvorougla.

**13.86.** U paralelogramu $ABCD$ tačka $M$ je sredina duži $AD$, $BC=2AB$, $E$ je podnožje normale spuštene iz temena $C$ na $AB$. Dokazati da je $\measuredangle EMD=3\measuredangle AEM$.

**13.87.** Oko trougla $ABC$ opisan je krug. Dokazati da je ugao između prečnika $CM$ kruga i visine $CK$ trougla jednak $|\alpha-\beta|$.

**13.88.** Strane paralelograma su $a$ i $b$. Odrediti dužinu dijagonala četvorougla koji obrazuju simetrale unutrašnjih uglova datog paralelograma.

**13.89.** Dokazati da je površina pravilnog osmougaonika jednaka proizvodu njegove najmanje i najveće dijagonale.

**13.90.** Visine trougla $ABC$ seku se u tački $O$. Ako je $OC=AB$, naći $\measuredangle ABC$.

**13.91.** Dijagonale dele konveksni četvorougao na 4 trougla. Zna se da su površine tri od tih trouglova redom $1\,\text{cm}^2$, $2\,\text{cm}^2$, $3\,\text{cm}^2$. Kolika može da bude površina četvrtog trougla?

**13.92.** Dat je paralelogram $ABCD$. Na pravama $AB$ i $BC$ izabrane su redom tačke $H$ i $K$ tako da su trouglovi $KAB$ i $HCB$ jednakokraki ($KA = AB$, $HC = CB$). Dokazati da je i trougao $KDH$ takođe jednakokrak.

**13.93.** Dijagonale četvorougla $ABCD$ seku se u tački $O$. Ako je $BO = OD$ i $AB + BC = AD + DC$, dokazati da je tada četvorougao $ABCD$ paralelogram ili je simetričan u odnosu na dijagonalu $AC$.

**13.94.** Krug poluprečnika $R$ prolazi kroz vrh $A$ jednakokrakog trougla $ABC$, dodiruje osnovu $BC$ u tački $B$ i seče krak $AC$ u tački $D$. Odrediti dužinu kraka $AB$ ako je $AD : DC = k$.

**13.95.** Za trougao $ABC$ data su 4 tvrđenja: 1) trougao $ABC$ je pravougli; 2) $\measuredangle BAC = 30^0$; 3) $AB = 2\,BC$; 4) $AC = 2\,BC$. Zna se da su dva tvrđenja tačna a dva netačna. Odrediti obim trougla $ABC$, ako je $BC = 1$.

**13.96.** Krugovi, konstruisani nad kracima trapeza kao nad dijametrima, dodiruju se. Dokazati da se u trapez može upisati krug.

**13.97.** Na okruglom stolu poluprečnika $R$ poređeno je $n$ okruglih novčića poluprečnika $r$, tako da se više novčića ne može staviti na sto. Dokazati da je

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r} - 1\right) < \sqrt{n} < \frac{R}{r}.$$

**13.98.** U trouglu $ABC$ povučene su visine $AK$ i $BH$. Ako je $O$ centar opisanog kruga trougla $ABC$, dokazati da je $OC$ normalno na $KH$.

**13.99.** Dat je ugao sa temenom $O$ i krug koji dodiruje krake ugla u tačkama $A$ i $B$. Prava kroz tačku $A$ paralelna pravoj $OB$ seče krug u tački $C$. Duž $OC$ seče krug u tački $E$, a prave $AE$ i $OB$ seku se u tački $K$. Dokazati da je $OK = KB$.

**13.100.** Dokazati da površina svakog trougla nije veća od polovine površine kvadrata kojim se može pokriti taj trougao.

**13.101.** Dokazati da su u pravouglom trouglu rastojanja temena $A$ oštrog ugla do centara spolja upisanih krugova koji dodiruju hipotenuzu $AB$ i katetu $BC$ jednaka.

**13.102.** Dat je jednakokraki trougao $ABC$. Uglovi $BAC$ i $BCA$ jednaki su $80^0$. Iz temena $A$ i $C$ povučene su prave do preseka sa naspramnim stranama respektivno u tačkama $D$ i $E$. Ugao $CAD$ jednak je $60^0$, ugao $ACE$ jednak je $50^0$. Odrediti veličinu ugla $ADE$.

**13.103.** U trouglu $ABC$ povučene su iz temena $B$ medijana i visina. Ako one dele ugao $ABC$ na tri jednaka dela, koliki su uglovi trougla $ABC$?

**13.104.** Na duži $AB$ uzeta je proizvoljna tačka $M$. Sa iste strane duži $AB$ konstruisani su kvadrati $AMDE$ i $MBCH$. Ako su $O$ i $O_1$ centri ovih kvadrata odrediti geometrijsko mesto sredina duži $OO_1$.

**13.105.** Krug koji dodiruje dve katete i opisani krug pravouglog trougla ima poluprečnik jednak prečniku upisanog kruga tog trougla. Dokazati.

**13.106.** Kroz teme $A$ trougla $ABC$ postavljena je prava paralelno sa $BC$ i na njoj uzeta tačka $D$. Na $CD$ spuštena je normala $BE$. Dokazati da je površina trougla $ABC$ jednaka $\frac{1}{2}\, CD \cdot BE$.

**13.107.** Dokazati da je u oštrouglom trouglu zbir rastojanja ortocentra od temena dva puta veći od zbira poluprečnika opisanog i upisanog kruga.

**13.108.** Na krugu su izabrane tačke $A$, $B$ i $C$. Dokazati da podnožja normala povučenih iz proizvoljne tačke $M$ kruga na prave $AB$, $BC$ i $CA$, leže na jednoj pravoj.

**13.109.** Četiri jednake lopte datog poluprečnika $r$ dodiruju se svaka sa svakom. Izračunati poluprečnik najmanje lopte koja ih sve obuhvata.

**13.110.** Dokazati da:

1° $n$ pravih koje leže u ravni, od kojih se bilo koje dve seku i bilo koje tri ne prolaze kroz istu tačku, dele ravan na $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ delova;

2° $n$ ravni od kojih bilo koje tri imaju jednu i samo jednu zajedničku tačku i bilo koje četiri ne prolaze kroz jednu tačku, dele prostor na $\frac{1}{2}(n^3+5n+6)$ delova.

**13.111.** Dat je jednakokraki trapez koji je opisan oko kruga. Dokazati da duži, koje spajaju tačke dodira suprotnih strana i kruga, prolaze kroz presečnu tačku dijagonala.

**13.112.** U okrugloj kuli čiji je unutrašnji prečnik 2 m nalaze se zavojne stepenice visoke 6 m. Visina svakog stepenika iznosi 0,15 m. U horizontalnoj projekciji stepenice se vide kao isečci kružnog prstena sa uglom od $18^0$, koji su jedan uz drugi. Uži krajevi stepenika pričvršćeni su za okrugli stub prečnika 0,64 m, čija se osa poklapa sa osom kule. Izračunati najveću dužinu prave šipke koja se može preneti ovim stepenicama odozdo do gore (ne uzimati u obzir debljinu šipke niti debljinu ploča od kojih su napravljene stepenice).

**13.113.** Dijagonale tetivnog četvorougla seku se u tački $K$. Projekcije tačke $K$ na uzastopne strane tog četvorougla su $M$, $N$, $P$, $Q$. Dokazati da su prave $KM$, $KN$, $KP$, $KQ$ simetrale uglova četvorougla $MNPQ$.

**13.114.** U tetraedru $ABCD$ suprotne ivice su dve po dve jednake. Dokazati da su prave koje prolaze kroz sredine suprotnih ivica uzajamno normalne i da su ose simetrije za dati tetraedar.

**13.115.** Konstruisati pravougli trougao ako su dati njegova hipotenuza $c$ i tup ugao $\alpha$ između medijana kateta. Odrediti granice u kojima treba da leži ugao $\alpha$.

**13.116.** Na dva kruga povučene su jedna unutrašnja zajednička dirka i obe spoljašnje zajedničke dirke (zajednička dirka je unutrašnja ako su krugovi na raznim stranama od te dirke, a u suprotnom je spoljašnja). Dokazati da je

odsečak unutrašnje dirke, koji na njoj odsecaju spoljašnje dirke, jednak odsečku spoljašnje dirke čiji su krajevi tačke dodira.

**13.117.** Po unutrašnjoj strani obruča poluprečnika $2r$ kotrlja se bez klizanja kotur poluprečnika $r$. Koju liniju opisuje tačka proizvoljno izabrana na ivici kotura?

**13.118.** Dat je krug $C$ kao i tačke $A$ i $B$ na različitim odstojanjima od centra tog kruga. Dokazati da zajedničke tetive kruga $C$ i krugova koji prolaze kroz tačke $A$ i $B$, leže na pravama koje prolaze kroz jednu fiksnu tačku.

**13.119.** Odrediti geometrijsko mesto sredina duži date dužine $a$, čiji krajevi leže na dvema uzajamno normalnim pravama (koje se seku ili mimoilaze).

**13.120.** Na periferiji pravougaonika izabrana je tačka $M$. Odrediti najkraći put koji polazi i završava se u tački $M$ i koji ima zajedničku tačku sa svakom stranom pravougaonika.

**13.121.** Uz pravu $AB$ sa iste njene strane konstruisana su tri polukruga sa prečnicima $AB=a+b$, $AC=a$, $CB=b$. Izračunati poluprečnik kruga upisanog u figuri ograničenoj tim polukrugovima, ako su dati $a$ i $b$.

**13.122.** Ako u trouglu $ABC$ brojevi $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg} C$ obrazuju aritmetičku progresiju, dokazati da brojevi $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$ takođe obrazuju aritmetičku progresiju.

**13.123.** Ako postoji lopta koja dodiruje sve ivice tetraedra, dokazati da su zbirovi suprotnih ivica jednaki i da takođe važi obrnuto tvrđenje.

**13.124.** Kroz sredinu jednog kraka trapeza povući pravu koja deli trapez na dva dela jednakih površina.

**13.125.** U krugu su povučene dve jednake tetive $AB$ i $AC$ kao i proizvoljna tetiva $AD$. Prava $AD$ seče pravu $BC$ u tački $E$. Dokazati da proizvod $AE \cdot AD$ ne zavisi od položaja tačke $D$ na krugu, tj. da je $AE \cdot AD=(AC)^2$.

**13.126.** Date su dve ravni $A$ i $B$ koje se seku, kao i prava $m$ koja prodire kroz ravni $A$ i $B$. Odrediti geometrijsko mesto sredina duži koje su paralelne pravoj $m$ i čiji krajevi leže na ravnima $A$ i $B$.

**13.127.** Dat je prostorni četvorougao $ABCD$ i ravan koja preseca prave $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ redom u tačkama $M$, $N$, $P$, $Q$ različitim od $A$, $B$, $C$, $D$.

Dokazati da je

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DQ}{QA}=1.$$

**13.128.** Svaku stranu trougla date površine $S$ podelimo na tri jednaka dela i spojimo deone tačke tako da dobijemo dva trougla čiji je zajednički deo jedan šestougao. Izračunati površinu tog šestougla.

**13.129.** Dat je ravnokraki trapez koji je opisan oko kruga. Dokazati da duži, koje spajaju tačke dodira suprotnih strana i kruga, prolaze kroz presečnu tačku dijagonala.

**13.130.** Dat je krug i dve dirke toga kruga. Povući treću dirku tog kruga tako da njen odsečak koji se nalazi između datih dirki ima datu dužinu $d$.

**13.131.** Dokazati da se oko tangentnog četvorougla može opisati krug ako i samo ako su tetive upisanog kruga, koje spajaju tačke dodira suprotnih strana četvorougla sa krugom, normalne.

**13.132.** Za tetraedar $ABCD$ označimo sa $S_A$, $S_B$, $S_C$, $S_D$ površine strana tetraedra koje su suprotne redom temenima $A$, $B$, $C$, $D$ a sa $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ diedre tetraedra kroz ivice $AD$, $BD$ i $CD$. Dokazati da je

$$S_D^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - 2\, S_A S_B \cos\gamma - 2\, S_B S_C \cos\alpha - 2\, S_A S_C \cos\beta.$$

**13.133.** U ravni je dato 5 tačaka od kojih bilo koje tri ne leže na istoj pravoj. Dokazati da među tim tačkama postoje četiri koje su temena nekog konveksnog četvorougla.

**13.134.** U dati kvadrat upisati kvadrat, čija strana ili njen produžetak prolazi kroz datu tačku $K$.

**13.135.** Konstuisati jednakostranični trougao, čija temena leže na tri date paralelne prave.

**13.136.** U trouglu $ABC$ dat je ugao $A$. Da li je mogućno izračunati uglove $B$ i $C$, ako znamo da neka prava, koja prolazi kroz tačku $A$, deli trougao na dva jednakokraka trougla?

**13.137.** Dato je u prostoru $n\,(\geqq 5)$ ravni tako da se bilo koje tri seku u jednoj tački i ne postoji četiri ravni koje se seku u jednoj tački. Dokazati da među delovima na koje ove ravni dele prostor ima ne manje od $(2n-3)/4$ tetraedara.

**13.138.** U tetraedru $ABCD$ izabrana je tačka $S$. Prave $AS$, $BS$, $CS$, $DS$ presecaju suprotne strane tetraedra u tačkama $A'$, $B'$, $C'$, $D'$. Dokazati da je

$$\frac{SA'}{AA'} + \frac{SB'}{BB'} + \frac{SC'}{CC'} + \frac{SD'}{DD'} = 1.$$

**13.139.** Data su dva koncentrična kruga. Konstruisati kvadrat čija dva temena leže na jednom krugu a preostala dva na drugom krugu.

**13.140.** Ako se dve visine tetraedra seku, dokazati da se takođe i preostale dve visine seku.

**13.141.** Ako ravna figura ima samo dve ose simetrije, dokazati da su te dve ose normalne.

**13.142.** Dokazati da tačke koje su simetrične tački preseka visina trougla $ABC$ u odnosu na prave $AB$, $BC$ i $CA$ leže na opisanom krugu tog trougla.

**13.143.** Dužine strana nekog trougla su:

$$a=p^2+p+1, \qquad b=p^2+2p, \qquad c=2p+1,$$

gde je $p$ pozitivan broj. Izračunati srednji po veličini ugao trougla.

**13.144.** Štap dužine $a$ visi na paralelnim koncima dužine $b$ koji su zavezani za njegove krajeve, tako da se nalazi u horizontalnom položaju. Štap se okrene za ugao $\varphi$ oko vertikalne ose koja prolazi kroz sredinu štapa. Za koliko će se štap podići?

**13.145.** Dokazati da između strana $a$, $b$, $c$ i suprotnih uglova $A$, $B$, $C$ trougla postoji veza

$$a^2\cos^2 A=b^2\cos^2 B+c^2\cos^2 C+2\,bc\cos B\cos C\cos 2\,A.$$

**13.146.** Ako je $A+B+C=180^0$ i ako je $n$ neparan broj, dokazati da je

$$\sin nA+\sin nB+\sin nC=4\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\cos\frac{nA}{2}\cdot\cos\frac{nB}{2}\cdot\cos\frac{nC}{2}.$$

**13.147.** Dokazati da nejednakost

$$\frac{1}{3}\leq\frac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\leq 3$$

ne važi za sve vrednosti $\alpha$.

**13.148.** Ako nijedan od uglova konveksnog četvorougla $ABCD$ nije prav, dokazati da važi jednakost

$$\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}D}{\operatorname{tg}A\ \operatorname{tg}B\ \operatorname{tg}C\ \operatorname{tg}D}=\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C+\operatorname{cotg}D.$$

**13.149.** Dokazati da je površina $S$ tetivnog četvorougla sa stranama $a$, $b$, $c$, $d$ data izrazom

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \qquad (2p=a+b+c+d).$$

**13.150.** Unutar trougla $ABC$ nalazi se tačka $P$ takva da je $\sphericalangle PAB=\sphericalangle PBC=$ $=\sphericalangle PCA=\varphi$. Dokazati da je

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}.$$

**13.151.** Dokazati da se od pet datih tačaka u ravni uvek mogu izabrati tri tačke koje nisu temena oštrouglog trougla.

**13.152.** Konstruistati krug i koristeći se samo šestarom podeliti njegovu periferiju na četiri jednaka dela.

**13.153.** Rešiti nejednačinu

$$(1-\cos x)(1-\cos 2x)(1-\cos 3x) < \frac{1}{2}.$$

**13.154.** Dokazati nejednakosti

$$\cos a+\cos b \leqq 2\cos\frac{1}{2}(a+b) \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<a,\quad b<\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos a+\cos b+\cos c+\cos d \leqq 4\cos\frac{1}{4}(a+b+c+d) \qquad (-\pi/2<a,\ b,\ c,\ d<\pi/2).$$

Generalisati.

**13.155.** Dokazati da za svako $a$ i $b$ važi nejednakost

$$\sin a \sin b \leqq \sin^2\frac{1}{2}(a+b).$$

Takođe dokazati nejednakost

$$\sin a \sin b \sin c \sin d \leqq \sin^4\frac{1}{4}(a+b+c+d) \qquad (0\leqq a,\ b,\ c,\ d\leqq \pi)$$

i odavde, stavljajući $d=\frac{1}{3}(a+b+c)$, izvesti nejednakost

$$\sin a \sin b \sin c \leqq \sin^3\frac{1}{3}(a+b+c).$$

Generalisati.

**13.156.** Ako je

$$a\cos p+b\sin p=c, \qquad a\cos q+b\sin q=c,$$

dokazati jednakosti:

$$\sin(p+q)=2ab/(a^2+b^2), \qquad \operatorname{cotg} p+\operatorname{cotg} q=2ab/(c^2-a^2).$$

Da li ove jednakosti važe za sve vrednosti parametara?

**13.157.** Dokazati da za uglove proizvoljnog trougla važi jednakost

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1.$$

**13.158.** Dokazati identitet

$$\frac{1+\cos(2\alpha+630^\circ)+\sin(2\alpha+810^\circ)}{1-\cos(2\alpha-630^\circ)+\sin(2\alpha+630^\circ)}=\operatorname{cotg}\alpha.$$

**13.159.** Rešiti jednačinu $\operatorname{tg} x+2\operatorname{tg} 2x+3\operatorname{tg} 3x+4\operatorname{tg} 4x=0$.

**13.160.** Uprostiti izraz

$$\sin^2(\alpha-\beta)-\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta).$$

**13.161.** Dokazati da važi jednakost

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right),$$

za sve vrednosti $x$ za koje gornji izraz ima smisla.

**13.162.** Ako uglovi trougla $ABC$ zadovoljavaju jednakost

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3},$$

dokazati da je bar jedan ugao trougla jednak $\frac{\pi}{3}$.

**13.163.** Ako uglovi trougla $ABC$ zadovoljavaju jednakost

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

dokazati da je jedan ugao trougla veći od $120^0$.

**13.164.** Kakva algebarska relacija postoji između $A$, $B$ i $C$ ako je

$$\operatorname{cotg} A + \frac{\cos B}{\sin A \cos C} = \operatorname{cotg} B + \frac{\cos A}{\sin B \cos C}?$$

**13.165.** U konveksnom četvorouglu $ABCD$ naspramni uglovi $A$ i $C$ su pravi. Na dijagonalu $AC$ spuštene su normale $BE$ i $DF$. Dokazati da je $CE = FA$.

**13.166.** Dat je trougao $ABC$ sa stranama $AB = 4$, $BC = 3$, $AC = 5$. Na strani $AB$ uzeta je tačka $D$ tako da je $DB = 7/8$. Kroz tačke $B$, $C$ i $D$ postavljen je krug koji seče $AC$ u tački $E$. Odrediti dužinu duži $BE$.

**13.167.** U trouglu $ABC$ povučene su simetrale $AD$ i $CF$ uglova $BAC$ i $ACB$ (tačka $D$ leži na strani $BC$, tačka $F$ na strani $AB$). Ako je $P$ površina trougla $ABC$ i $Q$ površina trougla $AFD$, dokazati da je

$$\frac{P}{Q} = \frac{(a+b)(b+c)}{bc}.$$

**13.168.** Ugao pri vrhu jednakokrakog trougla je $\frac{\pi}{7}$. Dokazati da osnovica $a$ i krak $b$ zadovoljavaju jednakost

$$a^5 - 4a^3 b^2 + 3ab^4 - b^5 = 0.$$

**13.169.** Kroz teme paralelograma $ABCD$ povučena je prava koja seče dijagonalu $BD$, stranu $BC$ i produženje strane $DC$ redom u tačkama $E$, $F$ i $K$. Naći dužinu odsečka $EF$ ako je $AE = 2$, $EK = 3$.

**13.170.** Iz centra $O$ kruga poluprečnika $R$ povučeni su poluprečnici $OA$ i $OB$ koji zaklapaju ugao $\alpha$. U odsečku kruga koji odseca tetiva $AB$ upisan je jednakostranični trougao tako da mu je jedna strana normalna na $AB$. Odrediti dužinu strane trougla.

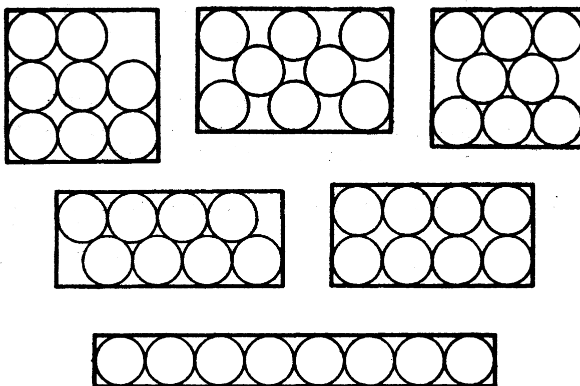
**13.171.** Naći treću stranu trougla ako su date dve njegove strane $a$ i $b$ i ako se zna da medijane koje odgovaraju ovim stranama obrazuju prav ugao.

**13.172.** Dokazati da za proizvoljan trougao važi nejednakost

$$m_a + m_b + m_c \leqq 4R + r,$$

gde su $m_a$, $m_b$, $m_c$ medijane, $R$ poluprečnik opisanog i $r$ poluprečnik upisanog kruga trougla.

**13.173.** Osam jednakih krugova, kao što je na slici pokazano, smešteno je u pravougaonicima na više načina. U kome slučaju pravougaonik ima najmanji, a u kome najveći obim?



Sl. uz zadatak 13.173.

**13.174.** Kružni isečak ($r$ poluprečnik, $2\alpha$ centralni ugao u radijanima) rotira oko svoje ose simetrije. Naći zapreminu tako dobijenog obrtnog tela.

***Rešenje.*** Ako je $0 < 2\alpha < \pi$, rotacijom kružnog isečka oko ose simetrije nastaje loptin isečak. Zapremina ovog tela određena je obrascem

$$V_1 = \frac{2\pi r^2 h}{3} \quad (h = r - r\cos\alpha),$$

odakle je

(1) $$V_1 = \frac{2\pi r^3 (1 - \cos\alpha)}{3}.$$

Ako je $\pi < 2\alpha < 2\pi$, potrebno je od zapremine lopte oduzeti zapreminu loptinog isečka čiji je centralni ugao $2\beta = 2\pi - 2\alpha$. Prema tome, s obzirom na (1), tražena zapremina je

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{2\pi r^3 \{1 - \cos(\pi - \alpha)\}}{3},$$

tj.

(2) $$V_2 = \frac{2\pi r^3 (1 - \cos\alpha)}{3}.$$

Budući da su desne strane formula (1) i (2) jednake, zaključujemo da je zapremina ovog obrtnog tela

$$V = \frac{2\pi r^3 (1 - \cos\alpha)}{3} \qquad (0 < 2\alpha < 2\pi).$$

**13.175.** Odrediti jednačinu kruga koji dodiruje parabolu $y^2 = 4ax$ u tački $(at^2, 2at)$ i čiji se centar nalazi na $x$-osi.

***Rezultat.*** $x^2 + y^2 - 2a(t^2 + 2)x + a^2 t^4 = 0.$

**13.176.** Neka je $L$ prava koja prolazi kroz žižu jedne parabole i stoji normalno na njenoj osi ($L$ se naziva latus rectum). Neka je $P$ jedna tačka na pravoj $L$ i neka prava koja prolazi kroz $P$ i stoji normalno na $L$ seče parabolu u tački $Q$.

Dokazati da je $2PQ$ jednako harmonijskoj sredini dužina duži $AP$ i $BP$, gde su $A$ i $B$ tačke u kojima $L$ seče parabolu.

**13.177.** Dokazati da se jednakostranični trougao ne može upisati u jednu kvadratnu rešetku, tako da temena trougla leže u presecima horizontalnih i vertikalnih linija rešetke.

*Rešenje.* Posmatrajmo jednu kvadratnu rešetku koja se nalazi u pravouglom koordinatnom sistemu. Izaberimo razmeru po $x$ i $y$-osi tako da su koordinate tačaka u preseku horizontalnih i vertikalnih linija rešetke celi brojevi. Prema tome, ako se jednakostranični trougao može upisati u ovu rešetku onda su koordinate njegovih temena celi brojevi. Iz formule za površinu trougla

$$S=\frac{1}{2}\left[y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)\right]$$

izlazi da je površina ovog trougla racionalan broj.

S druge strane, pošto je površina jednakostraničnog trougla $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, gde je

$$a^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

racionalan broj, izlazi da je površina iracionalan broj.

Ova dva rezultata su u kontradikciji, odakle se zaključuje da ne postoji jednakostranični trougao koji se može upisati u kvadratnu rešetku.

*Napomena.* Lako se dokazuje da se jednakostranični trougao može upisati u kubnu rešetku.

# ZADACI SA TAKMIČENJA I PRIJEMNIH ISPITA

1. REPUBLIČKA TAKMIČENJA
2. SAVEZNA TAKMIČENJA
3. MEĐUNARODNA TAKMIČENJA
4. PRIJEMNI ISPITI NA ELEKTROTEHNIČKOM FAKULTETU U BEOGRADU

# 1. REPUBLIČKA TAKMIČENJA

## 1.1. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1961

### I razred

1. Date su jednačine

$$\frac{2a-x_1}{3}+\frac{x_1}{2}=\frac{5}{3}, \quad \frac{x_2}{2}+x_2-a=1.$$

(a) Rešiti po $x_1$ i $x_2$ ove jednačine.

(b) Odrediti $a$ tako da je $x_1=x_2$ i naći njihovo zajedničko rešenje.

(c) Za nađenu vrednost $a$ obrazovati funkcije:

$$y=\frac{2a-x}{3}+\frac{x}{2}-\frac{5}{3}, \quad y=\frac{x}{2}+x-a-1$$

i grafički ih predstaviti u istom koordinatnom sistemu. Gde se nalazi presečna tačka oba grafika?

2. Date su u prostoru četiri tačke.

(a) Odrediti tačku podjednako udaljenu od tih tačaka.

(b) Postaviti ravan od koje su sve četiri date tačke podjednako udaljene. Koliko ima takvih ravni? Dati opis konstrukcije.

3. U četvorouglu $ABCD$ tačka $E$ je sredina strane $AB$ a tačka $F$ sredina naspramne strane $CD$. Ako se počev od $E$ konstruišu vektori $\overrightarrow{ED'}$ i $\overrightarrow{EC'}$, jednaki vektorima $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$, dokazati da tačke $C'$, $F$, $D'$ leže na jednoj pravoj.

4. Rešiti jednačinu

$$\frac{3ab+1}{a}x-\frac{3ab}{a+1}-\frac{a^2}{(a+1)^3}=\frac{(2a+1)x}{a^3+2a^2+a}.$$

(a) Dokazati da rešenje jednačine ne zavisi od $b$.

(b) Odrediti $a$ tako da dobijena vrednost za $x$ bude pozitivna, zatim i veća od 1.

5. Dat je jednakokraki trougao $ABC$ $(AB=AC)$. Van trougla konstruisani su jednakostranični trouglovi $ABD$ i $ACE$. Dokazati da je $BE=DC$ i da se te dve duži seku na visini $AH$ trougla.

---

* Formulacije nekih zadataka su poboljšane, ali još ostaje veliki broj zadataka, na čije se formulacije mogu staviti primedbe.

### II razred

1. Dat je krug prečnika $AB=2R$ i na njemu tačka $M$ čija je ortogonalna projekcija na $AB$ tačka $P\,(AP=x)$.

(a) Izraziti $y=AM^2+2PM^2$ kao funkciju od $R$ i $x$ i proučiti tu funkciju kad $x$ varira od 0 do $2R$.

(b) Odrediti $x$ tako da je $y=kR^2\,(k>0)$.

2. Dokazati da su ortogonalne projekcije temena jednog paralelograma na njegove dijagonale temena novog paralelograma sličnog datom.

3. Odrediti $m$ tako da je $x^4+2x^3-23x^2+12x+m\equiv(x^2+ax+c)(x^2+bx+c)$. Odrediti koeficijente $a$, $b$, $c$ i na osnovu toga rastaviti dati polinom IV stepena na linearne činioce. Najzad odrediti nule datog polinoma.

4. Normalni presek prizmatične površine je jednakostranični trougao $ABC$ strane $a$. Na normalama koje polaze iz $B$ i $C$ sa iste strane ravni $ABC$ uzete su dve tačke $B'$ i $C'$ tako da je $BB'=y$, $CC'=x\,(y>x)$.

(a) Koji uslov treba da zadovoljavaju $x$ i $y$ da bi trougao $AB'C'$ bio pravougli sa temenom pravog ugla u $C'$?

(b) Kako se iz datog uslova računski i konstruktivno određuje $y$ za dato $x$?

### III razred

1. Funkcija $y=x^2+(m-3)x+1-2m$ određuje skup parabola.

(a) Dokazati da sve ove parabole seku $x$-osu.

(b) Odrediti jednačinu geometrijskog mesta temena svih parabola i nacrtati to geometrijsko mesto.

(c) U skupu funkcija $x^2+(m-3)x+1$ odrediti one čija je jedna nula tri puta veća od druge.

2. Dat je pravougaonik $ABCD\,(AB=a,\ AD=b,\ a>b)$ i na njegovim stranama tačke $M$, $N$, $P$ i $Q$ tako da je $BM=BN=CP=DQ=x\,(x<b)$.

(a) Dokazati da je $MNPQ$ paralelogram.

(b) Izraziti površinu paralelograma kao funkciju od $x$.

(c) Odrediti $x$ tako da ta površina bude maksimalna.

(d) Za koju će vrednost $x$ dobijeni paralelogram biti romb?

3. U jednoj ravni nalaze se tri poluprave $OA$, $OB$, $OC$ tako da je $\sphericalangle COA=\sphericalangle AOB=60^0$. Iz tačke $P$, koja se nalazi u uglu $AOB$, povučene su normale $PQ$, $PR$, $PS$ na $OA$, $OB$ i $OC$. Dokazati da je: $PQ+PR=PS$.

4. U polukrugu prečnika $AB=2r$ povučena je tetiva $AC$. Polukrug rotira oko prečnika $AB$.

(a) Izraziti kao funkciju poluprečnika i $\sphericalangle BAC=x$ površinu koja postaje rotacijom luka $CB$.

(b) Odrediti ugao $BAC$ tako da te dve površine budu jednake.

### *IV razred*

**1.** Data je funkcija $y = x^2 + px + q$.

(a) Odrediti $p$ i $q$ tako da grafik ove funkcije seče $y$-osu u tački $A$ (0, 1) i dodiruje pravu $y + 3 = 0$ (za $p$ i $q$ uzeti oba rešenja).

(b) Konstruisati obe krive i odrediti ugao pod kojim se one seku.

(c) Ako $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$ označavaju korene jednačine $x^2 + px + q = 0$, odrediti relaciju koja postoji između $p$ i $q$ ako je $\alpha + \beta = \pi/3$. Odrediti $p$ i $q$ tako da pored ostalih uslova jedan koren ove jednačine bude 1.

**2.** Naći jednačinu tangente hiperbole $3x^2 - y^2 = 3$ u tački $A$ (2, 3) i dokazati:

(a) Da se ortogonalne projekcije hiperbolinih žiža na tangenti nalaze na krugu opisanom oko centra hiperbole poluprečnikom $a$ ($a$ je poluosa).

(b) Da tačka simetrična jednoj žiži hiperbole u odnosu na tu tangentu leži na krugu koji je opisan oko druge žiže poluprečnikom $2a$.

**3.** Lopta poluprečnika $r$ dodiruje ravan $P$ u tački $A$. Vrh prave kupe nalazi se na lopti u tački $B$, koja je dijametralno suprotna tački $A$, a osnova kupe, poluprečnika $R$, leži u ravni $P$. Oba tela preseći jednom ravni $Q$ koja je paralelna sa ravni $P$ na rastojanju $x$.

(a) Izraziti kao funkciju od $x$ razliku površina preseka kupe i preseka lopte.

(b) Odrediti $R$ tako da funkcija ima minimum za $x = \frac{3}{2} r$.

**4.** Date su dve stalne tačke $A$ i $B$ ($AB = a$) i promenljiva prava $L$ koja prolazi kroz tačku $A$.

(a) Odrediti geometrijsko mesto tačke $M$ koja je ortogonalna projekcija tačke $B$ na promenljivoj pravoj $L$.

(b) Na pravoj $L$ uzete su duži $MP = MQ = MB$. Konstruisati geometrijsko mesto tačaka $P$ i $Q$ kada $L$ rotira oko $A$. Dati geometrijsko rešenje kao i rešenje metodom koordinata.

## 1.2. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1962

### *I razred*

**1.** Ako je $aa' = bb' = cc'$, dokazati: $(a + b')(b + c')(c + a') = (a' + b)(b' + c)(c' + a)$.

**2.** Dat je paralelepiped $ABCDA'B'C'D'$. Ako je $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{p}$, konstruisati svaki od sledećih vektora (nacrtati sliku):

(a) $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$; (b) $\vec{m} + \vec{n} + \frac{1}{2}\vec{p}$; (c) $\frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} + \vec{p}$;

(d) $\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$; (e) $-\vec{m} - \vec{n} + \frac{1}{2}\vec{p}$.

**3.** 1° Rešiti jednačinu $\frac{2x}{a^3 - 8} - \frac{a}{a^2 + 2a + 4} = \frac{x - 1}{a - 2}$, gde je $a$ dati realan broj. Da li za svako $a$ data jednačina ima rešenje?

2° Za koje je vrednosti broja $a$ rešenje date jednačine pozitivan broj?

3° Koliko treba da bude $a$ da je $x = 0$ rešenje date jednačine?

**4.** Date su ravni $p$ i $q$ i tačke $A$, $B$, $C$ koje ne leže na istoj pravoj. Odrediti tačku $O$ koja je podjednako udaljena od ravni $p$ i $q$ i od tačaka $A$, $B$ i $C$. Da li uvek postoji tačka $O$?

**5.** Dat je trougao $ABC$. Na strani $AC$ izabrano je $n$ tačaka $M_1, M_2, \ldots, M_n$ od kojih se ni jedna ne poklapa sa temenima $A$ i $C$, a na strani $BC$ takođe $n$ tačka $N_1, N_2, \ldots, N_n$ od kojih se ni jedna ne poklapa sa temenima $B$ i $C$. Na koliko je delova podeljen trougao $ABC$ dužima $BM_1, BM_2, \ldots, BM_n$ i $AN_1, AN_2, \ldots, AN_n$?

### *II razred*

**1.** Dat je kvadratni trinom

(1) $$f(x)=(m+1)x^2-2(m-1)x+m-5 \qquad (m \text{ realno}).$$

1° Dokazati da krive $y=f(x)$ prolaze za svako $m$ kroz jednu zajedničku tačku koju treba odrediti.

2° Dokazati da ne postoji nijedan trinom (1) čiji je ekstremum u ovoj zajedničkoj tački.

**2.** Odrediti $a$ i $b$ tako da polinom $x^4+3x^2+ax+b$ bude deljiv polinomom $x^2-2ax+2$.

**3.** Date su: prava $p$ i tačke $A$ i $B$ koje ne leže na pravoj $p$. Konstruisati krug koji prolazi kroz tačke $A$ i $B$ i koji dodiruje pravu $p$.

**4.** Dat je razlomak $\dfrac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}$ ($a$, $b$, $c$, $d$ racionalni brojevi).

Koji uslov moraju ispunjavati $a$, $b$, $c$, $d$ da bi dati razlomak bio racionalan broj?

**5.** Data su dva koncentrična kruga $k_1$ i $k_2$ od kojih $k_2$ ima veći poluprečnik. Konstruisati sečicu $s$ koja krug $k_1$ seče u tačkama $A_1$ i $A_2$, a krug $k_2$ u tačkama $B_1$ i $B_2$, tako da se tačka $A_1$ nalazi između tačaka $B_1$ i $A_2$ i da je $B_1A_1=A_1A_2=A_2B_2$.

### *III razred*

**1.** 1° Dokazati identičnosti:

$$\sin kx=\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad \cos kx=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

gde je $k=1, 2, \ldots, n$.

2° Koristeći se rezultatima dobijenim pod 1°, odrediti zbirove

$$S_1=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx, \quad S_2=\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx.$$

**2.** Dokazati da je izraz $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$ pozitivan za svako $x$ ako su $a$, $b$, $c$ merni brojevi dužina strana jednog trougla.

**3.** Odrediti osnovni period funkcije $f(x)=\sin x \sin(x+a)$, gde je $a\,(0<a<\pi/2)$ data konstanta.

**4.** Osnova prave prizme je jednakokraki trougao kraka $a$ i ugla na osnovici $\alpha$. Kroz osnovicu gornjeg bazisa i suprotno teme donje osnove postavljena je ravan $p$ koja je nagnuta prema ravni osnove pod uglom $\beta$.

1° Odrediti veličinu površine omotača ove prizme.

2° Ravan $p$ deli prizmu na dva tela od kojih je jedno četvorostrana piramida. Odrediti zapreminu ove piramide.

**5.** Data je kružnica $k$ i tačka $M$ na njoj. Kroz tačku $M$ povlače se sve mogućne tetive kružnice $k$ čije smo druge krajeve označili sa $N$. Neka je $X$ tačka tetive $MN$ takva da je $MX:XN=m:n$, gde su $m$ i $n$ dati brojevi. Naći skup tačaka $X$ kada se tačka $N$ kreće po datoj kružnici $k$.

### *IV razred*

**1.** Data je funkcija $f(x)=\dfrac{x}{a^x-1}+\dfrac{x}{2}$. Dokazati da je:

(a) $f(x)=f(-x)$; (b) $4f(2x)\,f(x)=4f(x)^2+x^2$.

**2.** Data je elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ čije se žiže nalaze u tačkama $F_1(-c,0)$ i $F_2(+c,0)$. Naći skup sredina svih tetiva elipse koje prolaze kroz žižu $F_2$.

**3.** Ako za uglove $\beta$ i $\gamma$ trougla postoji jednakost $\sin^2\beta/\sin^2\gamma=\operatorname{tg}\beta/\operatorname{tg}\gamma$, trougao je jednakokrak ili pravougli. Dokazati.

**4.** Neka su $S_1$, $S_2$, $S_3$ redom zbirovi prvih $n_1$, $n_2$, $n_3$ članova aritmetičke progresije. Dokazati da je

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_3)+\frac{S_2}{n_2}(n_3-n_1)+\frac{S_3}{n_3}(n_1-n_2)=0.$$

**5.** Pravilan tetraedar ivice $a$ presečen je jednom ravni $p$ koja prolazi kroz jednu njegovu ivicu i koja suprotnu ivicu tetraedra deli u odnosu $2:1$. Naći veličinu površine preseka kao i uglove preseka.

## 1.3. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1963

### *I razred*

**1.** Ako su $x$, $y$, $z$ realni brojevi, dokazati identitet

$$\frac{xy}{(z-x)(z-y)}+\frac{yz}{(x-y)(x-z)}+\frac{zx}{(y-z)(y-x)}\equiv 1.$$

**2.** Dokazati da tačke $A(1,\ 1-3k)$, $B(3,\ 1-k)$, $C(5,\ 1+k)$, ma kakav bio broj $k$, uvek leže na nekoj pravoj $p$ čiji je koeficijent pravca $k$.

Dokazati da sve prave $p$ prolaze kroz jednu zajedničku tačku.

3. Ako je $xyz = 1$, dokazati

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)=4.$$

4. Konstruisati pravougli trougao kada je data njegova hipotenuza i težišna linija jedne njegove katete.

### *II razred*

1. Neka je $y=\left(\frac{5}{2}x^2-x+5\right)^2-\left(\frac{3}{2}x^2+5x-4\right)^2$.

(a) Dokazati da je $y \geqq 0$ za svako realno $x$.

(b) Rešiti jednačinu $y=0$ po $x$.

2. U ravni $\alpha$ data je kružnica $k$ sa prečnikom $AB=2a$. Na normalama ravni $\alpha$ u tački $A$ i u centru kružnice $O$ sa jedne strane ravni određene su tačke $C$ i $D$ tako da je $AC=a$, $OD=2a$. Na kružnici $k$ odrediti tačku $M$ tako da trougao $CMD$ bude pravougli.

3. Ako je $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, onda je $\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1$. Dokazati. Da li važi i obrnuto?

4. Konstruisati trougao čija visina, težišna linija i simetrala ugla, koje polaze iz istog temena, predstavljaju tri date duži.

### *III razred*

1. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x - m \operatorname{tg} 2x = 0$.

(a) Dokazati da su rešenja ove jednačine ujedno i rešenja jednačine

$$\sin 2x\left(2m\cos^2 2x+(m+2)\cos 2x-m\right)=0.$$

(b) Rešiti datu jednačinu ako je $m=-1$.

2. Četiri tačke u prostoru $A$, $B$, $C$, $D$ međusobno su udaljene za $d=4$. Neka je $S$ tačka koja je jednako udaljena od tih tačaka. Naći njeno udaljenje od tih tačaka.

3. Ako su koreni jednačine $x^2+px+q=0$ realni i različiti, dokazati da jednačine:

$$x^2+(p+2a)x+(q+ap)=0, \quad 3x^2+2(p+a)x+(q+ap)=0$$

imaju isto tako realne i različite korene.

4. Dokazati identitet

$$\cos^3\alpha+\sin^3\alpha+\cos^4\alpha-\sin^4\alpha \equiv 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

*IV razred*

1. Dokazati da sve parabole $y^2-2\lambda y+\lambda x+\lambda=0$ ($\lambda$ realni broj) prolaze kroz jednu zajedničku tačku i da im temena leže na jednoj pravoj.

2. Među svim elipsama $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ koje prolaze kroz datu tačku $A(x_0, y_0)$ naći onu koja ima najmanju površinu.

3. Dokazati identitet

$$\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha\equiv\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha},$$

gde je $n$ prirodan broj i $\sin\alpha\neq 0$.

4. Ispitati funkciju: $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3(x^2-x)+\sqrt[3]{n^6+x}}{n^3(x^2-4)+n^2+nx}$ i nacrtati njen grafik.

## 1.4. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1964

*I razred*

1. Dokazati da je proizvod četiri uzastopna prirodna broja deljiv sa 24.

2. Dokazati $ad=bc \Leftrightarrow (ab+cd)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)$.

3. Dokazati da tačke $(a+b, a-b+1)$, $(a+b+2, a-b+3)$, $(a+b+5, a-b+2)$, $(a+b+3, a-b)$ predstavljaju temena paralelograma ako su $a$ i $b$ proizvoljni brojevi. Dokazati da su ovi paralelogrami za razne vrednosti $a$ i $b$ podudarni.

4. U jednoj ravni data su dva kruga $k_1$ i $k_2$ i prava $p$. Konstruisati pravu $q$ paralelnu pravoj $p$ koja seče krug $k_1$ u tačkama $A$ i $B$ i krug $k_2$ u tačkama $C$ i $D$ tako da je zbir tetiva $AB$ i $CD$ jednak datoj dužini $l$.

5. Konstruisati trougao $ABC$ ako su date dve njegove stranice i razlika njegovih naspramnih uglova.

*II razred*

1. Racionalisati: $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$.

2. Ako je $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$, gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dati brojevi, dokazati da je, za svako $x$,

$$f(x)\geq f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right).$$

3. Neka su $a$, $b$, $c$ tri različita realna broja od kojih nijedan nije nula. Ako je $a+b+c=0$, dokazati da je

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9.$$

**4.** Neka su $P$, $Q$, $R$, $S$ ortogonalne projekcije preseka $O$ dijagonala četvorougla $ABCD$ na njegovim stranicama $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Dokazati da je

$$\sphericalangle SOQ = 180^0 \pm \frac{1}{2} (\sphericalangle SRQ - \sphericalangle SPQ),$$

gde su $\sphericalangle SRQ$ i $\sphericalangle SPQ$ unutrašnji uglovi četvorougla $PQRS$.

**5.** Dat je jednakostranični trougao $OAB$ stranice $a$. Odrediti pravu paralelnu stranici $AB$ koja seče stranice $OA$ i $OB$ (ili njihove produžetke) redom u tačkama $C$ i $D$ tako da je $AC^2 + CD^2 + DB^2 = 3a^2$.

### *III razred*

**1.** Dokazati da je trougao pravougli ako njegovi uglovi $p$, $q$, $r$ ispunjavaju uslov $\cos p + \cos q = \sin r$.

**2.** Rešiti po $x$, $y$, $z$ sistem jednačina

$$ax + by + z = 1, \quad x + aby + z = b, \quad x + by + az = 1,$$

gde su $a$ i $b$ dati brojevi. Diskutovati.

**3.** Neka su $a$, $b$, $c$ dužine stranica datog oštrouglog trougla.

(a) Ako je $R$ dužina poluprečnika kruga opisanog oko datog trougla, dokazati da je

$$a\sqrt{4R^2 - a^2} + b\sqrt{4R^2 - b^2} + c\sqrt{4R^2 - c^2} = \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

(b) Rešiti po $x$ jednačinu

$$a\sqrt{x^2 - a^2} + b\sqrt{x^2 - b^2} + c\sqrt{x^2 - c^2} = \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}.$$

**4.** Dokazati da se sve ravni, od kojih svaka sadrži jednu ivicu triedra i simetralu naspramnog ivičnog ugla, seku po jednoj pravoj.

### *IV razred*

**1.** Ispitati funkciju $y = \frac{(x-1)^2(x-3)}{x^2}$ i nacrtati njen grafik.

**2.** Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni brojevi takvi da je $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Dokazati nejednakost $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n} \leq n$.

**3.** Odrediti $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 2x \cos 3x - 1}{x^2}$.

**4.** Dokazati da je proizvod $k$ uzastopnih prirodnih brojeva deljiv sa $k!$

5. Odrediti brojeve $A$, $B$, $C$ tako da za svaki prirodni broj $n$ važi jednakost:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=\frac{An+B}{2^n}+C.$$

## 1.5. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1965

### *I razred*

1. Ako je

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0,$$

tada je

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2. Rastaviti na proste činioce polinom $P(x)=2x^3+3x^2+x$ i odrediti najveći prirodan broj kojim su deljivi svi brojevi $P(x)$ kada je $x=1, 2, 3, \ldots$

3. Data je familija pravih: $ax+by=1$, gde su brojevi $a$ i $b$ vezani jednakošću $a^2+b^2=1$.

Dokazati da su sve ove prave podjednako udaljene od koordinatnog početka.

4. Konstruisati trougao $ABC$ ako su date: njegova stranica $c$, simetrala ugla $\alpha$ i razlika dva ugla: $\beta-\gamma$.

5. U prostoru su date tačke $A$, $B$, $C$ i $D$. Dokazati da sredine duži $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ pripadaju istoj ravni.

### *II razred*

1. Ako je $a \geqq b \geqq 0$, dokazati da je:

$$\sqrt{(a+b)^3}-\sqrt{(a-b)^3}=\sqrt{2}\,(2a+\sqrt{a^2-b^2})\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.$$

2. Data je familija parabola

$$y=x^2+(\lambda+2)x+3-\lambda,$$

gde je $\lambda$ realan broj.

(a) Dokazati da sve ove parabole prolaze kroz jednu zajedničku tačku.

(b) Odrediti geometrijsko mesto temena ovih parabola.

3. U krugu su povučene dve međusobno normalne tetive. Ako su $a$, $b$, $c$, $d$ dužine odsečaka tih tetiva od presečne tačke do periferije kruga, dokazati da je površina tog kruga:

$$P=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)\pi.$$

**4.** Na ivicama $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ nanete su duži

$$AM=y, \quad BN=x, \quad CP=z \quad \left(x, y, z \leqq \frac{a}{2}\right),$$

pa je kroz tačke $M$, $N$ i $P$ postavljena ravan koja seče ivicu $DD_1$ u tački $Q$.

(a) Dokazati da je četvorougao $MNPQ$ paralelogram.

(b) Odrediti zavisnost $x$ od $y$ i $z$ tako da taj paralelogram bude pravougaonik.

**5.** Konstruisati trougao ako je data njegova stranica $a$, ugao $\alpha$ i težišna linija $t_b$.

### *III razred*

**1.** Geometrijski prikazati skup tačaka čije koordinate zadovoljavaju jednakost

$$\sin x + \sin y = \sin(x+y).$$

**2.** Ravan $\alpha$ koja prolazi kroz hipotenuzu $AB$ pravouglog trougla $ABC$ gradi sa katetama uglove od $30^0$ i $45^0$. Iz temena $C$ spuštena je normala $CO$ na ravan $\alpha$ pri čemu je $CO=a$.

Odrediti ugao između ravni trougla $ABC$ i ravni $\alpha$ i površinu i zapreminu tetraedra $ABOC$.

**3.** Kraci pravog ugla klize po pravama $y=a$, $y=b$ $(a \neq b)$ a teme mu se nalazi u koordinatnom početku. Napisati jednačinu geometrijskog mesta podnožja visina povučenih iz temena pravog ugla na hipotenuzu, određenu presekom krakova pravog ugla i datih pravih.

**4.** Neka su $x$ i $y$ celi brojevi. Dokazati da je $3x+2y$ deljivo sa 5 ako i samo ako je $4x+y$ deljivo sa 5.

**5.** Rešiti jednačinu $\sqrt[3]{49+x} + \sqrt[3]{49-x} = 2$.

### *IV razred*

**1.** Odrediti realna rešenja jednačine

$$\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = 1 \quad (a \text{ realan parametar}).$$

**2.** Dokazati nejednakost

$$n(x-1) \leqq x^n - 1 \leqq nx^{n-1}(x-1),$$

gde je $x>1$ i $n$ prirodan broj.

**3.** Odrediti

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+A_1x+B_1} + \sqrt{x^2+A_2x+B_2} - 2x\right).$$

4. Dokazati jednakost

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^n(n-1)+1}{n+1}.$$

5. Data je funkcija $y = \log(\lambda x^2 + x + 1)$.
(a) Odrediti $\lambda$ tako da funkcija bude definisana za svako $x$;
(b) Naći geometrijsko mesto stacionarnih tačaka.

## 1.6. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1966

### *I razred*

1. Pokazati da iz proporcije

$$(a+b+c+d):(a-b+c-d) = (a+b-c-d):(a-b-c+d)$$

sleduje $a:c = b:d$.

2. U dati kvadrat upisati jednakostranični trougao.

3. Rešiti sistem jednačina

$$mx - 2y = 3, \quad 3x + my = 4$$

i odredi $m$ tako da rešenja budu pozitivna.

4. Konstruisati trougao ako je data stranica $c$, simetrala ugla $\alpha$ i razlika uglova $\beta$ i $\gamma$.

5. U istoj ravni dati su trouglovi $ABC$ i $MNP$. Ako su $T$ i $T_1$ njihova težišta, dokazati da je

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = 3\,\overrightarrow{TT_1}.$$

### *II razred*

1. Uprostiti izraz

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

2. Na polukrugu prečnika $AB = 2R$ uzeti tačku $M$ čija je projekcija na $AB$ tačka $P$. Odrediti položaj tačke $P$ tako da je

$$(AM)^2 + (MB)^2 + 2(MP)^2 = \lambda R^2.$$

Za koje vrednosti $\lambda$ zadatak ima smisla?

3. Konstruisati trougao kada je dato $\beta-\gamma$, $h_a$ i $R$ ($R$ poluprečnik opisanog kruga).

4. U pravilnom tetraedru $ABCS$ tačka $P$ je na sredini visine iz temena $S$. Dokazati da je $AP$ normalno na $BP$ i $BP$ normalno na $CP$.

**5.** Dokazati da tačke simetrične ortocentru trougla u odnosu na stranice leže na krugu opisanom oko trougla.

### *III razred*

**1.** Dokazati da jednakost $\sin\alpha\,\sin 2\alpha\,\sin 3\alpha=1$ ne važi ni za jedno $\alpha$.

**2.** Rešiti sistem jednačina

$$\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2,$$
$$\log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2,$$
$$\log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2.$$

**3.** Površine trouglova koje obrazuju osnovice trapeza sa odsečcima dijagonala iznose $p$ i $r$. Kolika je površina tog trapeza?

**4.** Iz sredine visine pravilne četvorostrane piramide spuštena je normala dužine $m$ na bočnu ivicu i normala dužine $n$ na bočnu stranu. Naći zapreminu piramide.

**5.** Stranica $AB=c$ trougla $ABC$ nepomična je, dok se stranica $AB=b$ obrće oko temena $A$ u ravni trougla ne menjajući svoju dužinu.

Odrediti jednačinu skupa tačaka sredina stranice $BC$.

### *IV razred*

**1.** Koliko različitih delilaca ima broj 12?

**2.** Brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots$ su članovi aritmetičke progresije. Ako je $p+q=r+s$, dokazati da je:

(a) $a_p+a_q=a_r+a_s$;

(b) $$\frac{a_1a_2a_3}{a_1+a_3}+\frac{a_2a_3a_4}{a_2+a_4}+\cdots+\frac{a_na_{n+1}a_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}=\frac{1}{2}n\left(a_1^2+a_1d(n+1)+\frac{(n-1)(2n+5)}{6}d^2\right).$$

**3.** Naći $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

**4.** U ravni $xOy$ odrediti krivu koja ima osobinu da je svaka njena tačka podjednako udaljena od prave $x+\alpha=1$ i kruga $x^2+y^2-2\alpha x+\alpha^2-1=0$ $(\alpha>1)$. Dokazati da je za svaku tangentu te krive proizvod koeficijenta pravca i odsečka koji tangenta gradi na ordinatnoj osi konstantan.

**5.** Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$y=\frac{1-\log x}{1-x^2}$$

(nule prvog izvoda odrediti grafički).

## 1.7. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1967

### *I razred*

1. Dat je polinom $P(x)=x^3+3x^2-x-3$.

a) Rastaviti $P(x)$ na činioce;

b) Rešiti jednačinu $P(x)=0$;

c) Pokazati da je $P(x)$ deljivo sa 3 ako je $x$ paran broj, a da je $P(x)$ deljivo sa 48 ako je $x$ neparan broj.

2. U oštrouglom trouglu $AFE$ visine $ED$ i $FB$ seku se u tački $C$. Tačke $M$, $N$, $P$ i $Q$ su redom sredine duži $FC$, $EC$, $AE$ i $AF$. Dokazati da je četvorougao $MNPQ$ pravougaonik.

3. Ako je $abc=1$, dokazati da je

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2-4=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right).$$

4. Dat je sistem jednačina

$$ax-4y+2=0, \quad x-ay-1=0,$$

gde je $a$ realan parametar.

1° Odrediti $a$ tako da dati sistem: a) ima jedno rešenje $(x, y)$, b) nema ni jedno rešenje, c) ima beskonačno mnogo rešenja.

2° Da li dati sistem jednačina može imati celobrojnih rešenja?

4. Konstruisati trougao ako je dato: strana $a$, zbir $b+c=m$ (jednako datoj duži) i razlika uglova kod temena $B$ i $C$ jednaka je datom uglu.

### *II razred*

1. Konstruisati trougao ako su dati: strana $a$, tačka $D$ na toj strani kroz koju prolazi simetrala naspramnog ugla $\alpha$ i poluprečnik $R$ opisanog kruga toga trougla.

2. Dokazati da je

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1.$$

3. Za razne vrednosti parametra $\alpha$ rešiti jednačinu

$$|x^2-4x+3|=\alpha x-1.$$

4. Piramida $SABCD$ ima za osnovu kvadrat $ABCD$ strane $a$, njena bočna ivica $SA$ je normalna na ravan $ABCD$. Kroz ivicu $AD$ postavljena je ravan $\pi$ koja seče $SB$ u tački $B_1$ i $SC$ u tački $C_1$.

1° Dokazati da je četvorougao $AB_1C_1D$ trapez i naći geometrijsko mesto tačaka koje opisuje presečna tačka $M$ dijagonala $DB_1$ i $AC_1$ kada $B_1$ opisuje duž $SB$.

2° Ako je dužina bočne ivice $SA$ jednaka $a\sqrt{3}$, izraziti

$$y=AB_1^2+B_1C_1^2+C_1D^2$$

u funkciji od $SB_1=x$ i predstaviti grafički tu funkciju kada tačka $B_1$ opisuje duž $SB$.

**5.** Neka je $ABC$ trougao čije su stranice $AB$ i $AC$ nejednake i neka je $O$ centar opisanog kruga toga trougla. Visina $AD$ seče opisani krug u tački $K$, prava kroz $O$, normalna na $BC$, seče stranu $BC$ u tački $M$, a prava $AO$ seče opisani krug u tački $F$. $H$ je presek visina trougla.

Dokazati: 1° da su uglovi $BCK$, $CBF$ i $BCH$ jednaki, 2° $FK = 2MD$, 3° da tačke $F$, $M$ i $H$ leže na jednoj pravoj.

### *III razred*

**1.** Rešiti jednačinu:

$$\log\sqrt{2x-3}+\log\sqrt{2x+a}=2+\log 0{,}02,$$

gde je $a$ realan parametar (logaritam je sa osnovom 10).

**2.** Dat je krug $(x-1)^2+y^2=2$. Naći jednačinu skupa tačaka preseka visina svih trouglova upisanih u datom krugu ako im je zajednička strana tetiva koju odseca krug na $y$-osi.

**3.** Dokazati da je nejednakost $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta>1$ potreban i dovoljan uslov da bi trougao čija su dva ugla $\alpha$ i $\beta$ bio oštrougli.

**4.** Dat je pravougaonik $ABCD$ sa stranama $AB=a$, $BC=pa$ $(p\in \mathrm{N})$. Strana $BC$ je podeljena na $2p$ delova i deone tačke $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n=C$ spojene su sa temenom $A$. Neka su sa $\alpha_i$ $(i=1, \ldots, n=2p)$ obeleženi uglovi koje duži $AP_1, \ldots, AP_{n-1}, AC$ grade sa ivicom $BC$.

Ispitati da li postoje uglovi $\alpha_k$ i $\alpha_m$ $(k, m=1, \ldots, 2p;\ k\neq m)$ takvi da je $\alpha_k+\alpha_m=45^0$.

**5.** Dokazati da svaka ravan koja prolazi kroz sredine dveju naspramnih ivica tetraedra deli taj tetraedar na dva tela jednakih zapremina.

### *IV razred*

**1.** Data je funkcija $y=\dfrac{ax}{1-ax+a^2x^2}$.

1° Za razne vrednosti parametra $a$ ispitati ovu funkciju i grafički prikazati familiju odgovarajućih krivih $y=f(x, a)$.

2° Odrediti geometrijsko mesto ekstremuma tih krivih i nacrtati grafik.

**2.** Dokazati da je

$$2!\ 4!\cdots(2n)!>\big((n+1)!\big)^n.$$

**3.** Uglovi trougla $ABC$ obrazuju aritmetičku progresiju sa razlikom $\varphi$ pri čemu je $\alpha<\beta<\gamma$.

a) Između kojih granica se može nalaziti ugao $\varphi$?

b) Dokazati da stranice $a$, $b$, $c$ tog trougla zadovoljavaju jednakost

$$(a+c)^2=b^2+3ac.$$

Mogu li istovremeno i stranice tog trougla obrazovati aritmetičku progresiju?

c) Ako su dati strana $b$ i obim $2s$ trougla izračunati ugao $\varphi$ (diskusija) i stranice $a$ i $c$ (diskusija).

4. Isti kao 4. zadatka za III razred.

5. Koliko se različitih prirodnih brojeva deljivih sa tri može obrazovati od cifara 1, 2, 3, 4, 5 tako da se ni jedna od ovih cifara ne ponavlja?

## 1.8. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1968

### *I razred*

1. U ravni $Oxy$ grafik funkcije

$$|x-2|+|y-1|=3$$

ograničava deo ravni. Nacrtati grafik te funkcije i izračunati površinu tog dela ravni.

2. Odrediti najmanji prirodan broj koji pri deljenju sa brojevima 11, 12, 13, 14 i 15 daje ostatak 1.

3. Rešiti jednačinu

$$\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-ac}{a+c}+\frac{x-bc}{b+c}-c-b-a=0.$$

4. Dokazati da duži koje spajaju redom centre kvadrata konstruisanih nad stranama paralelograma izvan njega, obrazuju kvadrat.

5. Nad vektorima $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ i $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$ konstruisan je pravougli paralelepiped $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Neka je tačka $M$ centar strane $A_1B_1C_1D_1$ i tačka $N$ centar strane $BCC_1B_1$. Dokazati da je razlika vektora $\overrightarrow{AN}$ i $\overrightarrow{AM}$ vektor kolinearan vektoru $\overrightarrow{A_1B}$.

### *II razred*

1. Odrediti ostatak koji se dobija kada se polinom $x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$ podeli sa $x^3-x$.

2. Rešiti jednačinu $x+a|x|=a$, gde je $a$ realan broj.

3. Dva kruga se seku u tačkama $A$ i $B$. Sečica povučena kroz tačku $A$ seče krugove u tačkama $C$ i $D$. Tačka $E$ je presek tangenata krugova u tačkama $C$ i $D$. Dokazati da je četvorougao $BCED$ tetivni.

4. Nad prečnikom $AB$ kruga konstruisan je pravougaonik $ABCD$ čija je visina $AD$ jednaka strani kvadrata upisanog u tom krugu. Temena $C$ i $D$ spojena su sa proizvoljnom tačkom $N$ kruga. Duži $DM$ i $CN$ seku prečnik $AB$ u tačkama $E$ i $L$. Dokazati da je $AL^2+BE^2=AB^2$.

5. Konstruisati duž $x$ ako je $\frac{x^2}{m^2}=\frac{n}{p}$, gde su $m$, $n$ i $p$ date duži.

## *III razred*

**1.** Ako je $a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta)$, dokazati da je trougao $ABC$ jednakokrak.

**2.** Odrediti sva rešenja sistema jednačina

$$x+5y+z=tx,\quad x+y+5z=ty,\quad 5x+y+z=tz,$$

gde je $t$ realan parametar.

**3.** Osnova prave prizme $ABCDA_1B_1C_1D_1$ je romb $ABCD$ date strane $a$ i ugla kod temena $A$ od $60^0$. Ako je $M$ sredina ivice $AB$, $N$ sredina ivice $AD$ i $\alpha$ ugao između duži $MD_1$ i $NB_1$, odrediti zapreminu prizme u funkciji ugla $\alpha$.

**4.** Krug konstruisan nad kosim krakom pravouglog trapeza kao nad prečnikom, dodiruje normalan krak. Ako je visina trapeza $h$, odrediti površinu onog pravouglog trougla čije su katete jednake osnovicama trapeza.

**5.** Dat je krug $x^2+y^2=r^2$. Ortogonalna projekcija proizvoljne tačke $P$ kruga na osu $Ox$ je $P_1$. Oko tačke $P$ kao centra opisan je krug poluprečnika $PP_1$ koji seče dati krug u tačkama $M$ i $N$. Odrediti skup tačaka preseka duži $MN$ i $PP_1$.

## *IV razred*

**1.** Dokazati nejednakost

$$x^n+x^{n-2}+x^{n-4}+\cdots+\frac{1}{x^{n-4}}+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}\geq n+1,$$

gde je $x>0$, $n\in\mathrm{N}$ i svi eksponenti su nenegativni.

**2.** Niz $(x_n)$ je dat na sledeći način

$$x_1=a,\quad x_{n+1}=\frac{1}{4}+x_n^2.$$

Ispitati konvergenciju niza kada je $a<\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{2}$ i $a>\frac{1}{2}$ i naći granicu kada ona postoji.

**3.** Ako je $0\leq p\leq 1$ ispitati funkciju $y=\frac{2|x|}{x^2-2x+p}$ i nacrtati njen grafik.

**4.** Poluprečnik sfere upisane u zarubljenoj kupi je $R$, a poluprečnik opisane sfere je $R\sqrt{30}$. Naći ugao između izvodnice i osnove zarubljene kupe.

**5.** Dat je paralelepiped $P$ čije su ivice $a$, $b$ i $c$. Ravni paralelne njegovim stranama dele ivice na $m$ jednakih delova.

a) Odrediti broj svih tako dobijenih paralelepipeda $P_i$ i paralelograma $p_i$.

b) Ako je $A$ teme na donjoj osnovi, i $C_1$ teme na drugom kraju dijagonale paralelepipeda povučene iz $A$, odrediti broj svih mogućih putanja iz temena $A$ do temena $C_1$ ako se kretanje vrši duž ivica paralelepipeda $P_i$ uz stalno udaljavanje od temena $A$.

## 1.9. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1969

### *I razred*

**1.** Dokazati da je

$$\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right)+\frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{6}{(p+q)^5}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{p^3q^3}$$

ako je $p\neq 0$, $q\neq 0$, $p+q\neq 0$.

**2.** Petocifreni broj počinje cifrom 3. Ako tu cifru premestimo sa prvog na poslednje mesto, a da pri tome poredak ostale četiri cifre ostane nepromenjen, dobijeni broj je za 29997 veći od prvobitnog. Naći te brojeve.

**3.** Dva radnika mogu da završe neki posao za 12 dana. Posle 5 dana zajedničkog rada jedan radnik se razboleo, pa je drugi radnik sam produžio posao i završio ga za sledećih 17,5 dana. Za koliko dana bi mogao da završi taj posao svaki radnik radeći sam?

**4.** U ravni su date dve jednake duži $A_1B_1$ i $A_2B_2$. Odrediti tačku $C$ u toj ravni tako da bude

$$\triangle A_1B_1C \cong \triangle A_2B_2C.$$

**5.** Pravougli trougao je podeljen visinom povučenom iz temena pravog ugla na hipotenuzu na dva trougla u koje su upisani krugovi. Dokazati da je prava koja prolazi kroz centre ovih krugova normalna na simetrali pravog ugla trougla.

### *II razred*

**1.** Razlomak $\frac{281}{140}$ predstaviti kao zbir tri razlomka čiji su brojioci i imenioci jednocifreni brojevi.

**2.** Odrediti najmanju vrednost izraza

$$y=(x-5)(x-1)(x-6)(x-2)+9.$$

**3.** Ako je jedan ugao pravouglog trougla $15^0$, tada je proizvod kateta jednak kvadratu polovine hipotenuze. Dokazati.

**4.** Konstruisati trougao $ABC$, ako su date tačke: teme $A$, centar opisanog kruga $O$ i ortocentar $H$.

**5.** Iz proizvoljne tačke $P$ na simetrali $AD$ ugla $\alpha$ trougla $ABC$ konstruisane su normale $PC_1$, $PA_1$ i $PB_1$ redom na stranice $AB$, $BC$ i $CA$. Dokazati da presek pravih $B_1C_1$ i $PA_1$ pripada težišnoj liniji $AM$ trougla $ABC$.

### *III razred*

**1.** Dokazati nejednakost

$$\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}>\frac{1}{4}$$

ako brojilac razlomka na levoj strani sadrži $n$ kvadratnih korena, i imenilac $n-1$ kvadratnih korena.

**2.** Rešiti sistem jednačina

$$\sin x + \sin y = \sin (x+y),$$
$$|x|+|y|=1.$$

**3.** Dat je krug $K$ i njegova tetiva $AB$. U krugu su upisani trouglovi čija je jedna stranica $AB$. Naći geometrijsko mesto preseka visina ovih trouglova.

**4.** Da bi jedan ugao trougla iznosio $60^0$ ili $120^0$ potrebno je i dovoljno da rastojanje temena tog ugla do ortocentra bude jednako poluprečniku $R$ opisanog kruga. Dokazati.

**5.** Trostrana piramida se preseca ravnima koje su paralelne dvema mimoilaznim ivicama. Odrediti presek najveće površine.

*IV razred*

**1.** Dat je niz $(x_n)$:

$$x_1=\sqrt{a+\sqrt{a}},\quad x_2=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\quad x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}},\ \ldots\ (a>0).$$

Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**2.** Napisani su prirodni brojevi od $N$ do $M$ uključujući i $M$ i $N$ $(M>N)$. Koliki je broj cifara potreban da se napišu svi ovi brojevi. Izraziti taj broj cifara u funkciji od $N$ i $M$.

**3.** U urni se nalaze kuglice $k$ različitih boja, pri čemu kuglica $i$-te boje ima $n_i$. Izvlači se po jedna kuglica bez vraćanja, sve dok se među kuglicama ne pojavi $m$ kuglica iste boje. Koliko je izvlačenja za to nasigurno dovoljno?

**4.** Dati geometrijsku interpretaciju nejednakosti

$$|2z|<|1+z^2|$$

ako je $z$ kompleksan broj oblika $x+iy$.

**5.** Trostranu piramidu presecamo ravnima koje su paralelne dvema mimoilaznim ivicama. Odrediti položaj ravni tako da je presek najveće površine.

## 1.10. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1970

*II razred*

**1.** Za koje vrednosti realnog parametra $a$ jednačina

$$\sqrt{2x-3a}+\sqrt{2x+3a}=1$$

ima rešenje?

2. Dokazati da za svako realno $x$ polinom

$$x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}$$

ima pozitivnu vrednost.

3. U školi rade tri kružoka: matematički, fizički i hemijski. U svakom od njih radi po 15 učenika. Od učenika matematičkog kružoka učestvuje u kružoku za fiziku njih 7, a u kružoku za hemiju 8 učenika. Od učenika koji rade u kružoku za fiziku 5 njih radi u hemijskom kružoku. Zna se da 4 učenika rade u sva tri kružoka.

Odrediti:

a) Koliko učenika radi samo u matematičkom kružoku, samo u kružoku za fiziku i samo u kružoku za hemiju?

b) Koliko učenika radi samo u po jednom kružoku?

4. U krugu je upisan trougao $ABC$. Tačke $M$, $N$ i $P$ su sredine lukova $BC$, $CA$ i $AB$ (tačka $M$ se nalazi sa one strane prave $BC$ sa koje nije tačka $A$, itd.). Tetiva $MN$ seče stranicu $BC$ u tački $K$, a tetiva $NP$ seče stranicu $AB$ u tački $L$. Dokazati da je prava $KL$ paralelna pravoj $AC$ i da centar upisanog kruga trougla $ABC$ pripada duži $KL$.

5. Konstruisati trougao ako su date sve tri težišne linije.

### *IV razred*

1. Dat je niz brojeva $(a_n)$ određen formulom

$$a_{n+1}=\frac{3a_n-1}{3-a_n}.$$

Izraziti opšti član niza $a_n$ u funkciji od $a_1$, gde je $a_1=\text{const}<0$.

Naći $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

2. Dokazati da za $x>0$ važi nejednakost

$$\ln\frac{x+1}{x}>\frac{1}{1+x}.$$

3. Ako je $n$ prirodan broj odrediti broj članova u razvoju izraza

$$(a+b+c+d)^n.$$

4. Dat je konveksan četvorougao $ABCD$. Tačke $M$, $N$, $P$ i $Q$ koje pripadaju redom stranicama $AB$, $BC$, $CD$ i $DA$ dele te stranice u istoj razmeri. Odrediti vrednost te razmere tako da površina četvorougla $MNPQ$ bude najmanja.

5. Data je šahovska tabla formata $9\times9$. U donjem desnom uglu nalazi se pas, a u gornjem levom uglu zec. Na centralno polje table ne smeju doći ni pas ni zec. U gornjem desnom uglu i donjem levom uglu nalaze se skloništa za zeca. I pas i zec se kreću po tabli po pravilu: jedno polje napred, nazad, levo, desno ili ukoso (kao kralj). Dokazati da zec može da pobegne od psa u svoja skloništa bez obzira ko počinje igru, ako se igra naizmenično.

## 1.11. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1971

### *II razred*

**1.** Umesto slova staviti odgovarajuće cifre tako da bude tačno sabiranje

$$\begin{array}{r} R\ O\ V\ I\ NJ \\ +\quad I\ K\ A \\ +\quad I\ K\ A \\ \hline =U\ L\ C\ I\ NJ \end{array}$$

Svakom slovu odgovara jedna cifra, pri čemu različitim slovima odgovaraju različite cifre, a istim slovima iste.

**2.** Dokazati da je $(az^2+bz)(bz^2+az)=a^2-ab+b^2$, gde su $a$ i $b$ realni brojevi, a $z$ je rešenje jednačine $1+z+z^2=0$.

**3.** Ako su $a$, $b$, $c$ dužine stranica trougla, tada je funkcija

$$f(x)=b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$$

pozitivna za svako realno $x$. Dokazati.

**4.** Dokazati da je proizvod dužina normala konstruisanih iz ma koje tačke kruga na dve suprotne stranice četvorougla, upisanog u tom krugu, jednak proizvodu dužina normala konstruisanih iz iste tačke na druge dve stranice toga četvorougla.

**5.** Konstruisati četvorougao ako je dat poluprečnik opisanog kruga, jedna stranica četvorougla i razlika uglova na toj stranici.

### *III razred*

**1.** Rešiti sistem jednačina po $x$, $y$ i $z$

$$(b+c)(y+z)-ax=b-c,$$

$$(c+a)(z+x)-by=c-a,$$

$$(a+b)(x+y)-cz=a-b.$$

**2.** Odrediti sve vrednosti promenljive $x$, za koje je

$$\log_{(ax)}a+3\log_{(a^2x)}a>0,$$

ako je $a>1$.

**3.** Koja veza postoji između $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ako se zna da je

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1?$$

**4.** Kroz osnovnu ivicu pravilne četvorostrane piramide, čija je površina omotača $M_1=100\ \text{cm}^2$, postavljena je ravan koja od bočne strane odseca trougao površine $16\ \text{cm}^2$. Izračunati površinu omotača piramide, koja je datom ravni odsečena od date piramide.

## 1.12. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1972

### *II razred*

1. Ako je $x^2+x+1=0$, tada je $x^{1972}+x^{-1972}=-1$.

2. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1.$$

3. Dokazati da je u pravouglom trouglu odnos proizvoda simetrala oštrih uglova i proizvoda poluprečnika opisanog i upisanog kruga trougla izražen iracionalnim brojem.

4. Odrediti na stranicama $AC$ i $BC$ datog trougla $ABC$ redom tačke $X$ i $Y$ takve da su duži $AX$, $XY$ i $YB$ jednake.

5. Dokazati da postoji beskonačno mnogo nesličnih trouglova u kojima ortocentar polovi jednu i samo jednu visinu.

### *III razred*

1. Rešiti sistem jednačina

$$x^2+2yz=x, \quad y^2+2zx=z, \quad z^2+2xy=y.$$

2. Naći sva pozitivna rešenja jednačine

$$x^2+2x\sin(ax)+1=0,$$

pri čemu je $a$ realan parametar.

3. U tetraedru $DABC$ strana $BDC$ je normalna na stranu $ABC$, $DB=DC=1$ a ivični uglovi u temenu $D$ su svi jednaki $60^0$. Odrediti zapreminu tetraedra.

4. U deljenju bez ostatka

```
** *** ***:***=** 8**
 * **
 -----------
   *** *
    ** *
 -----------
     * ***
     * ***
 -----------
```

zameniti simbol „*“ ciframa tako da deljenje bude ispravno.

5. Neka je $\alpha$ oštar ugao. Dokazati da je

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\geq 3+2\sqrt{2}.$$

*IV razred*

**1.** Rešiti sistem jednačina

$$x_1 x_2 = 1, \quad x_2 x_3 = 1, \ldots, \quad x_{n-1} x_n = 1, \quad x_n x_1 = 1.$$

**2.** Da bi različiti od nule realni brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ činili aritmetičku progresiju potrebno je i dovoljno da za svaki prirodan broj $n \geqq 2$ važi jednakost

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} x_n} = \frac{n-1}{x_1 x_n}.$$

Dokazati.

**3.** Dat je trougao $A_1 A_2 A_3$ sa stranicama $a_1 = A_2 A_3$, $a_2 = A_3 A_1$, $a_3 = A_1 A_2$. Obeležimo sa $s_i$ tangentnu duž upisanog kruga datog trougla koja polazi iz temena $A_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Dokazati nejednakost

$$\frac{s_1}{a_1} + \frac{s_2}{a_2} + \frac{s_3}{a_3} \geqq \frac{3}{2},$$

pri čemu znak jednakosti važi ako i samo ako je trougao $A_1 A_2 A_3$ jednakostraničan.

**4.** U gradu Algeburgu mreža metroa ima 13 stanica. Svaka linija metroa ima četiri stanice. Svake dve različite linije metroa imaju jednu i samo jednu zajedničku stanicu, a svake dve različite stanice spaja direktnom vezom jedna i samo jedna linija metroa. Nacrtati mrežu metroa grada Algeburga.

**5.** Ispitati i grafički predstaviti funkciju

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}.$$

## 1.13. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1973

*III razred*

**1.** Dat je prost broj čije su sve cifre (u dekadnom razvoju) jednake 1. Dokazati da broj cifara mora biti prost. Važi li obrnuto?

**2.** Dokazati da za svako $x$ važi nejednakost

$$\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} \geqq 8.$$

**3.** Stranice trougla vezane su relacijom $a^2 = c(b+c)$. Dokazati da je u tom slučaju $\alpha = 2\gamma$.

**4.** Dat je oštrougli trougao $ABC$. Neka su $AA'$, $BB'$, $CC'$ njegove visine i $O$ centar opisanog kruga. Dokazati da je:

a) $OA \perp B'C'$,

b) površina trougla $ABC$ jednaka proizvodu poluobima trougla $A'B'C'$ i poluprečnika opisanog kruga trougla $ABC$.

5. U dati tetraedar upisan je drugi tetraedar čija su temena težišta strana datog tetraedra. Naći odnos zapremina ovih tetraedara.

*IV razred*

1. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$y=\sqrt[3]{x^3+2x^2}.$$

2. Neka su $a_1$, $a_2$, $a_3$ proizvoljni realni brojevi i neka je, za $n>3$, niz $(a_n)$ definisan rekurentnom formulom

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}}{3}.$$

Dokazati da je niz $(a_n)$ konvergentan.

3. Dokazati da za svaki prirodan broj $n$ i za svako $x$ za koje je $0<(n+1)x<\frac{\pi}{2}$ važi nejednakost

$$\frac{\cos(n+1)x}{\cos nx}<\cos^{2n+1}x.$$

4. Pauk juri muvu po beskonačnom ravnom polju. To se odigrava na sledeći način:

Pauk osmatra, zatim napravi jedan korak u pravcu severa, juga, istoka ili zapada; ponovo osmatra i zatim napravi još jedan korak u jednom od pomenutih pravaca (koji ne mora biti istovetan sa prethodnim) i na kraju ponovo osmatra.

Potom muva osmatra, napravi jedan korak u pravcu severa, juga, istoka ili zapada i ponovo osmatra.

Igra se zatim nastavlja na već opisani način. Dokazati da pauk može uhvatiti muvu ma gde se ona u početku nalazila ako se zna da su im koraci jednaki, da pauk vidi samo u pravcima sever, jug, istok i zapad, i da pauk kada vidi muvu nije u stanju da odredi daljinu do nje, već samo pravac u kome se ona nalazi. Muva u svakom momentu zna tačan položaj pauka.

5. Date su dve mimoilazne prave $p$ i $q$. Naći geometrijsko mesto sredina duži čiji krajevi pripadaju datim mimoilaznim pravama.

## 1.14. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1974

*I razred*

1. Neka su $a$, $b$ i $c$ proizvoljni brojevi takvi da je $abc\neq 0$, $a+b+c\neq 0$.

Ako je
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$
tada je
$$a+b=0 \quad \text{ili} \quad b+c=0 \quad \text{ili} \quad c+a=0.$$

Dokazati.

2. Razlika dva neparna broja deljiva je sa 5. Naći kojom cifrom se završava razlika kubova tih brojeva.

3. Iz temena $A$ trougla $ABC$ konstruisane su normale $AM$ i $AP$ na simetrale spoljašnjih uglova u temenima $B$ i $C$. Dokazati da je dužina duži $MP$ jednaka polovini obima trougla $ABC$.

4. Ugao u temenu $A$ trougla $ABC$ jednak je $75^0$. Izračunati ostale uglove ovog trougla ako prava koja prolazi kroz teme $A$ razbija trougao na dva jednakokraka trougla. (Ispitati sve slučajeve).

5. Rastojanje između mesta $A$ i mesta $B$ izražava se celim brojem kilometara koji je deljiv sa 5. Autobus prelazi put od $A$ do $B$ stalnom brzinom 60 km/h pri čemu na svakih 5 km ima stanicu na kojoj stoji 5 min. Biciklista prelazi put od $A$ do $B$ stalnom brzinom (ne staje usput) za 1 h. Na putu, njega je pretekao autobus, zatim je on pretekao autobus koji je stajao na stanici, zatim ga je ponovo pretekao autobus i više se oni nisu preticali. Da li je autobus putovao više ili manje od 45 min?

## *II razred*

1. Dokazati da se izraz

$$\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}-2}{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}+2}$$

može transformisati u izraz

$$\frac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}} \qquad (x>2).$$

2. Data je duž $AB=a$. Na datoj duži odrediti tačku $M$, tako da je zbir površina jednakokrako-pravouglih trouglova sa hipotenuzama $AM$ i $BM$ jednak datom broju $m$.

3. U konveksnom petouglu $ABCDE$ tačke $M$, $N$, $P$, $Q$ su sredine redom stranica $AB$, $BC$, $CD$, $DE$. Dokazati da je duž koja spaja sredine duži $MP$ i $NQ$ paralelna sa $AE$ i jednaka $\frac{1}{4}AE$.

4. Tačka $M$ pripada opisanom krugu oko jednakostraničnog trougla $ABC$. Neka su $p_1$, $p_2$, $p_3$ prave kroz $M$, paralelne sa $BC$, $CA$ i $AB$ i neka su $P_1$, $P_2$, $P_3$ presečne tačke pravih $p_1$, $p_2$, $p_3$ sa pravama $AB$, $BC$, $CA$. Dokazati da tačke $P_1$, $P_2$, $P_3$ pripadaju istoj pravoj.

5. Rastojanje između mesta $A$ i mesta $B$ izražava se celim brojem kilometara koji je deljiv sa 5. Autobus prelazi put od $A$ do $B$ stalnom brzinom 60 km/h, pri čemu na svakih 5 km ima stanicu na kojoj stoji 5 min. Biciklista prelazi put od $A$ do $B$ stalnom brzinom (ne staje usput) za 1 h. Na putu, njega je pretekao autobus, zatim je on pretekao autobus koji je stajao na stanici, zatim ga je ponovo pretekao autobus i više se oni nisu preticali. Da li je autobus putovao više ili manje od 45 min?

### *III razred*

**1.** Rešiti jednačinu

$$2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}-6\left(2^x-\frac{1}{2^{x-1}}\right)=1$$

u skupu realnih brojeva.

**2.** Stranice trougla $ABC$ iznose $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$. Dokazati da jednačina

$$x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma=0$$

(gde su $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ uglovi trougla $ABC$) ima u celim brojevima kao jedino rešenje $x=y=z=0$.

**3.** Neka su $h_a$, $h_b$, $h_c$ visine, a $r$ poluprečnik upisanog kruga trougla $ABC$. Ako je

$$h_a+h_b+h_c=9r$$

tada je trougao $ABC$ jednakostraničan. Dokazati.

**4.** Dokazati da je kod konveksnog mnogougla sa jednakim uglovima suma rastojanja proizvoljne tačke u mnogouglu do njegovih stranica — konstantna veličina.

**5.** Data je šahovska tabla formata $10\times 10$. Nazovimo superdamom figuru koja može da se kreće i kao dama i kao skakač. Razmestiti 10 superdama na ovu tablu tako da se nijedan par superdama uzajamno ne napada.

### *IV razred*

**1.** Izračunati graničnu vrednost:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

**2.** Dokazati da je

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{26}{28}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right).$$

**3.** Izračunati zbir

$$\frac{1}{\binom{n}{0}}-\frac{1}{\binom{n}{1}}+\frac{1}{\binom{n}{2}}-\frac{1}{\binom{n}{3}}+\cdots+\frac{(-1)^n}{\binom{n}{n}}.$$

**4.** Dokazati da je brojilac svedenog razlomka jednakog zbiru

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}$$

deljiv sa $p$, ako je $p$ prost broj veći od 2.

5. U državi Zavrzlamiji ima $n$ gradova. Treba ih povezati telefonskim linijama tako da budu ispunjeni uslovi:

a) Svaka linija povezuje dva grada;

b) Ima ukupno $n-1$ linija;

c) Iz svakog od tih $n$ gradova se može (direktno ili ne) razgovarati sa bilo kojim drugim gradom.

Na koliko se načina to može učiniti?

## 1.15. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1975

### *I razred*

1. Ako je $\frac{aa_1+bb_1+cc_1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=1$ i ako su brojevi $a, b, c, a_1, b_1, c_1$ svi različiti od nule, dokazati da je

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}.$$

2. Dokazati da je broj $N=4a^2+3a+5$, gde je $a$ ceo broj, deljiv sa 6 ako i samo ako $a$ nije deljiv ni sa 2 ni sa 3.

3. Iz mesta $A$ prema mestu $B$ krenuo je pešak brzinom 4 km/h. Posle nekog intervala vremena krenuo je za njim drugi pešak, a posle još toliko vremena i treći brzinom 6 km/h. Treći pešak stigao je drugog tačno na polovini puta između $A$ i $B$ a zatim su oni nastavili da se kreću zajedno brzinom koja je aritmetička sredina njihovih dosadašnjih brzina. Ako su sva tri pešaka zajedno stigla u $B$, naći početnu brzinu drugog pešaka.

4. U istoj ravni data je prava $p$ i tačke $A$ i $B$ sa iste strane te prave. Odrediti na pravoj $p$ tačke $C$ i $D$ tako da je duž $CD$ jednaka datoj duži $d$ i da je zbir $AC+CD+DB$ najmanji.

5. Data su dva para uzajamno normalnih pravih koje svojim presečnim tačkama određuju četiri pravougla trougla. Dokazati da sredine hipotenuza ovih trouglova čine temena pravougaonika.

### *II razred*

1. Data je jednačina

$$x^2-2ax-(a+3)=0.$$

Odrediti sve vrednosti celog broja $a$, tako da rešenja date jednačine budu celi brojevi.

2. Rešiti jednačinu

$$|x^2-1|+|x^2-4|=mx,$$

gde je $m$ realan parametar.

3. Dat je trougao $ABC$. Odrediti geometrijsko mesto tačaka $M$ u ravni tog trougla, takvih da se normale na pravama $MA$, $MB$ i $MC$, konstruisane kroz tačke $A$, $B$ i $C$, seku u jednoj tački.

4. Krugovi $k_1$ i $k_2$ seku se u tačkama $A$ i $B$. Kroz proizvoljnu tačku $M$ duži $AB$ konstruisane su tetiva $PQ$ kruga $k_1$ i tetiva $RS$ kruga $k_2$. Dokazati da tačke $P$, $Q$, $R$ i $S$ pripadaju jednom krugu.

5. Tačka $A$ nalazi se unutar šest krugova. Dokazati da se centar bar jednog od tih krugova nalazi u nekom od preostalih krugova.

## *III razred*

1. Ako je $n$ složen prirodan broj i ako su $1=d_0<d_1<\cdots<d_{m-1}<d_m=n$ svi prirodni delioci broja $n$, dokazati da je

$$\frac{2}{\log n}\sum_{k=1}^{m-1}\log d_k$$

prirodan broj.

2. Odrediti tangense brojeva $x, y, z$ ako je $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y : \operatorname{tg} z = a:b:c$, $x+y+z=\pi$, gde su $a$, $b$, $c$ pozitivni realni brojevi.

3. Dat je konveksan šestougao $ABCDEF$ u kome svaka od dijagonala $AD$, $BE$ i $CF$ deli površ šestougla na delove jednakih površina. Dokazati da se te dijagonale seku u jednoj tački.

4. Data je četvorostrana piramida čija je osnova romb, a bočne strane su jednako nagnute prema ravni osnove. Kroz proizvoljnu tačku $H$ osnove piramide konstruisana je normala na ravan osnove. Dokazati da zbir odsečaka na normali od tačke $H$ do njenih prodora kroz sve bočne strane piramide ne zavisi od izbora tačke $H$.

5. Data je proizvoljna kocka. Po njenim ivicama (samo po ivicama) kreću se muva i dva pauka. Njihove maksimalne brzine su jednake. U početnom trenutku se oba pauka nalaze u jednom temenu kocke, a muva u dijagonalno suprotnom. Dokazati da pauci uvek mogu da ulove muvu.

## *IV razred*

1. Odrediti aritmetičku progresiju $a_1, a_2, \ldots$ ako je

$$a_1+a_2+a_3+a_4=1,$$
$$a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3=0{,}1.$$

2. a) Dokazati da za svaki prirodan broj $n\geqq 2$ važi nejednakost

$$2\sqrt{n+1}-2<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1.$$

b) Odrediti najveći prirodan broj $m$ za koji važi nejednakost

$$m\leqq\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

3. Za koji prirodan broj $n$ je broj $\dfrac{19^n+75^n}{n!}$ najveći?

**4.** U donjem desnom i gornjem levom uglu šahovske table nalaze se skakači, beli i crni. Igrači povlače poteze naizmenično. Beli počinje igru, a cilj igre je uzeti protivničkog skakača. Igra se završava nerešeno kada se ista pozicija ponovi tri puta. Dokazati da se igra mora završiti remijem ukoliko oba igrača igraju najbolje.

**5.** Odrediti maksimum i minimum modula kompleksnog broja $z$ ako je

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=2.$$

## 1.16. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1976

### *I razred*

**1.** Skupovi $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ i $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ imaju $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$ i $s$ elemenata; pri tome je $M_1 \cap M_3 = M_2 \cap M_4 = \varnothing$. Dokazati da je

$$2s \geq n_1 + n_2 + n_3 + n_4.$$

Da li u ovoj nejednakosti može da važi znak jednakosti?

**2.** Deca dele orahe. Prvo dete je uzelo $a$ oraha i $n$-ti deo ostatka; drugo $2a$ i $n$-ti deo novog ostatka, itd. dok svi orasi nisu bili podeljeni. Ispostavilo se da je svako dete dobilo jedan isti broj oraha. Koliko je bilo dece?

**3.** U ravni je dato pet tačaka od kojih nikoje tri ne leže na jednoj pravoj. One se spajaju crvenim i plavim dužima i to tako da nikoje tri duži iste boje ne obrazuju trougao. Dokazati:

a) Iz svake tačke polaze dve plave i dve crvene duži.

b) Postoji izlomljena linija sastavljena od duži iste boje koja sadrži sve date tačke.

**4.** U trouglu $ABC$ ($\sphericalangle C = 90°$) konstruisane su simetrale $AD$ i $BF$ uglova u temenima $A$ i $B$. Iz tačaka $D$ i $F$ konstruisane su normale $DN$ i $FM$ na hipotenuzu. Dokazati da je $\sphericalangle MCN = 45°$.

**5.** Neka su tačke $K$, $L$, $M$ sredine stranica $BC$, $CA$ i $AB$ trougla $ABC$ a $P$, $Q$ i $R$ sredine izlomljenih linija $BAC$, $ACB$ i $CBA$. Dokazati da se prave $KP$, $LR$ i $MQ$ seku u jednoj tački.

### *II razred*

**1.** Ako se nekom trocifrenom broju sa leve strane dopišu tri cifre, dobija se kvadrat datog broja. Naći sve takve brojeve.

**2.** Pozitivni brojevi $x$, $y$, $z$ zadovoljavaju uslov

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}>1.$$

Dokazati da su ovi brojevi merni brojevi stranica nekog trougla.

3. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{4x-y^2}-\sqrt{y+2}=\sqrt{4x^2+y}.$$

4. Krugovi $k_1$, $k_2$, $k_3$ imaju zajedničke tačke $A$ i $B$. Prava $a$ sadrži tačku $A$ i seče krugove $k_1$, $k_2$ i $k_3$ redom u tačkama $A_1$, $A_2$, $A_3$. Neka su $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$ paralelne tetive krugova $k_1$, $k_2$ i $k_3$. Dokazati da tačke $B_1$, $B_2$ i $B_3$ pripadaju istoj pravoj.

5. U trougao $ABC$ upisan je paralelogram $ADEF$ tako da temena $D$, $E$, $F$ leže redom na stranicama $AB$, $BC$ i $CA$. Kroz središte $A_1$ stranice $BC$ konstruisana je prava $AA_1$ koja seče pravu $FE$ u tački $G$. Dokazati da je četvorougao $BGFD$ paralelogram.

## III razred

1. a) Dokazati da je $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(\alpha+60°)+\operatorname{tg}(\alpha+120°)=3\operatorname{tg}3\alpha$.

b) $\operatorname{tg}1°+\operatorname{tg}5°+\operatorname{tg}9°+\cdots+\operatorname{tg}173°+\operatorname{tg}177°=45$.

2. Dat je četvorougao $ABCD$, opisan oko kruga. Dokazati da se kvadrati rastojanja centra kruga do suprotnih temena odnose kao proizvodi stranica koje se sustiču u tim temenima.

3. Šest timova $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ takmiče se u nekom prvenstvu. Trojica prijatelja Aca, Bogdan i Vuk prognoziraju njihov konačan plasman. Acina prognoza: redosled će biti $ABCDEF$. Bogdanova prognoza je: $DFCBAE$. Vukova prognoza: $BDEAFC$. Na kraju prvenstva ispostavilo se da su Aca i Vuk tačno pogodili plasman tri tima, a Bogdan samo jednog. Odrediti plasman svih šest timova, ako se zna da su timovi osvojili različite brojeve bodova i da su to jedini timovi koji su učestvovali u prvenstvu.

4. Neka su $A$, $B$, $C$ i $D$ uzastopna temena pravilnog mnogougla i neka je

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}.$$

Koliko stranica ima taj mnogougao?

5. Ortogonalna projekcija vrha trostrane piramide na ravan osnove je težište osnove. Kroz sredinu visine konstruisane su četiri ravni paralelne osnovi i bočnim stranama piramide. Površine preseka ovih ravni sa piramidom su, redom, $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$. Izračunati površinu piramide.

## IV razred

1. Zadat je niz $(a_n)$ na sledeći način: $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{2xa_n}{a_n+x}$.

Izračunati $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

**2.** Ispitati i grafički predstaviti funkciju

$$y=\sqrt[3]{x^3+3x^2}.$$

**3.** Odrediti poslednje dve cifre broja

$$9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$$

**4.** Dokazati da za svaki prirodan broj $n$ važi

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\binom{n+k}{k}=2^n.$$

**5.** U ravni je dato $n^2$ tačaka sa koordinatama $(i, j)$ $(i,j=1,\ldots,n)$ i dato je $n$ boja. Svaku tačku bojimo nekom bojom. Bojenje ćemo nazvati pravilnim ako nema isto obojenih tačaka sa jednakim apscisama ili jednakim ordinatama. Sve tačke, osim nekoliko njih čija je apscisa 1, su pravilno obojene. Dokazati da se i one mogu obojiti tako da bojenje ostane pravilno.

## 1.17. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1977

### *I razred*

1. Neka je $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, $ac+bd=0$. Izračunati $ab+cd$.

2. Dokazati da je izraz: $\frac{1}{4}(||x-y|+x+y-2z|+|x-y|+x+y+2z)$ jednak najvećem od brojeva $x$, $y$, $z$.

3. Na osnovici jednakokrakog trougla odrediti tačku tako da razlika njenih odstojanja od krakova tog trougla bude podudarna (jednaka) datoj duži.

4. Za svaku tačku $P$ na stranici kvadrata $ABCD$ sa centrom $O$ konstruisan je jednakostranični trougao $OPQ$. Koju putanju opisuje tačka $Q$, kada se tačka $P$ kreće po stranicama kvadrata?

5. Jedna porodica polazi ove godine na letovanje poslednjeg dana u mesecu. Proizvod polovine njenog kućnog broja, datuma polaska na letovanje, rednog broja meseca povratka sa letovanja, broja dece u toj porodici i broja dana koje će provesti na letovanju (računajući i dan polaska) je 1452784. Odrediti datum završetka njihovog letovanja.

### *II razred*

1. Broj $3^{105}+4^{105}$ je deljiv sa 13, a nije deljiv sa 11. Dokazati.

2. Ako je $xy\neq0$, tada je $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\geq0.$

Dokazati ovu nejednakost i ispitati kada važi znak jednakosti.

3. Na osnovici $BC$ i kracima $AB$ i $AC$ trougla $ABC$ date su tačke $P$, $Q$ i $R$ takve da je $PQ \| AC$ i $PR \| AB$. Dokazati da tačka simetrična tački $P$ u odnosu na pravu $QR$ leži na krugu opisanom oko trougla $ABC$.

4. Dat je trougao $ABC$. Neka je $A'B'C'$ trougao čije su stranice težišne duži (medijane) trougla $ABC$ i $A''B''C''$ trougao čije su stranice težišne duži trougla $A'B'C'$. Dokazati da su trouglovi $ABC$ i $A''B''C''$ slični.

5. U nekom gradu postoji $n$ $(n \geqq 4)$ stanica milicije. U svakoj znaju po neki podatak važan za hvatanje nekog kriminalca. Dokazati da u $2n-4$ telefonskih razgovora sve stanice mogu znati sve podatke. (U jednom razgovoru učestvuju samo dve stanice.)

### *III razred*

1. Rešiti sistem jednačina $xy = bx + ay$, $yz = cy + bz$, $zx = az + cx$.

2. Dat je kružni prsten sa poluprečnicima 5 i 10. Dokazati da je mogućno pokriti ga sa osam krugova poluprečnika 4.

3. Dijagonale konveksnog četvorougla $ABCD$ se seku u tački $O$. Neka su $S_1$ i $S_2$ površine trouglova $AOB$ i $COD$ a $S$ površina četvorougla $ABCD$. Dokazati nejednakost $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \leqq \sqrt{S}$. Kada važi znak jednakosti?

4. U prostoru je dato $n$ $(n \geqq 3)$ tačaka. Svake dve od ovih tačaka određuju duž. Pretpostavimo da su ove duži različitih dužina. Svaku tačku spojimo sa njoj najbližom tačkom. Dokazati da se na ovaj način ne može dobiti zatvorena izlomljena linija.

5. U ravni je dato 5 tačaka sa celobrojnim koordinatama. Dokazati da postoji duž čiji krajevi pripadaju datom skupu takva da su koordinate središta te duži celobrojne.

### *IV razred*

1. Dokazati da je broj $\underbrace{11\ldots1}_{100}\underbrace{22\ldots2}_{100}$ proizvod dva uzastopna prirodna broja.

2. Dat je skup od $n$ elemenata. Odrediti broj njegovih podskupova koji sadrže neparan broj elemenata.

3. Ako su $a$ i $b$ rešenja jednačine $t^2 - 6t + 1 = 0$, dokazati da je $a^n + b^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ceo broj koji nije deljiv sa 5.

4. Odrediti minimum i maksimum funkcije

$$f(x, y) = \cos x + \cos y - \cos (x + y).$$

5. U ribnjak je pušteno 1977 štuka. One su gladne i jedu se među sobom. Štuka je sita kad pojede tri štuke (site ili gladne). Koliki je najveći broj štuka koje mogu utoliti glad?

## 1.18. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1978

### *I razred*

**1.** Neka su $a$, $b$, $c$ realni brojevi i $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$. Dokazati da je

$$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)\neq 0.$$

**2.** Rešiti jednačinu $2(x^2-y^2)=1978$, gde su $x$ i $y$ prirodni brojevi.

**3.** U dati trougao upisana su tri kvadrata tako da svaki od tih kvadrata ima dva temena na jednoj stranici, a po jedno teme na svakoj od preostale dve stranice trougla. Dokazati da je trougao jednakostraničan ako su sva tri kvadrata podudarna.

**4.** Neka je $P$ tačka u oštrouglom trouglu $ABC$. Neka je $d$, odnosno $D$, najmanje, odnosno najveće, rastojanje tačke $P$ od tačaka na stranicama trougla $ABC$. Dokazati da je $2d \leq D$. Kada važi znak jednakosti?

**5.** U kvadratnu tablicu $8\times 8$, počev od gornjeg levog ugla, upisani su redom brojevi od 1 do 64. U svakoj vrsti i svakoj koloni promenjen je znak na četiri mesta (na proizvoljan način), tako da sada imamo u svakoj vrsti i svakoj koloni po četiri pozitivna i četiri negativna broja. Dokazati da je zbir brojeva u tablici jednak nuli.

### *II razred*

**1.** Odrediti sve šestocifrene brojeve $\overline{abcdef}$, sa međusobno različitim ciframa, za koje važi

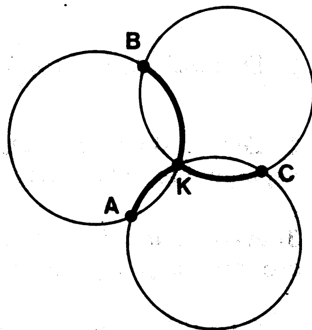
$$\overline{abcdef}=a(10^3(\overline{cc})^2-\overline{cc})\quad (a\neq 0).$$

(Brojevi su zapisani u sistemu sa osnovom 10.)

**2.** Odrediti sve cele brojeve $x$, $y$, $z$ takve da je

$$x^2+y^2+z^2<xy+3y+2z-3.$$

**3.** U ravni su data tri kruga jednakih poluprečnika koji se seku u tački $K$, kao na slici. Dokazati da je zbir označenih lukova $KA$, $KB$ i $KC$ jednak polukrugu istog poluprečnika.




**4.** a) Oko jednakostraničnog trougla $ABC$ opisan je krug $k$. Ako je $T$ proizvoljna tačka na luku $AB$ (koji ne sadrži tačku $C$) tog kruga, dokazati da je $TA+TB=TC$.

b) Sa $a$, $b$ i $c$ označimo dužine tangenata konstruisanih iz tačaka $A$, $B$ i $C$ na krug $k_1$, koji dodiruje krug $k$ u tački $T$, a nalazi se unutar kruga $k$. Dokazati da je $a+b=c$.

5. Neka je $n$ neparan broj, a $f$ obostrano jednoznačna funkcija (bijekcija) koja skup $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ preslikava na isti skup $A_n$. Dokazati da je proizvod $(f(1)+1)(f(2)+2)\cdots(f(n)+n)$ paran broj.

*III razred*

1. Rešiti sistem jednačina $x^2+y^2+z=2,\ x+y^2+z^2=2,\ x^2+y+z^2=2.$

2. Rešiti jednačinu $x^4-2ax^2+x+a^2-a=0$, pri čemu je $a$ realan parametar.

3. Koliko rešenja ima sistem

$$\cos x_1 = x_2,\ \cos x_2 = x_3, \ldots, \cos x_{n-1} = x_n,\ \cos x_n = x_1?$$

4. Odrediti sve prirodne brojeve koji se ne mogu predstaviti u obliku zbira nekoliko (bar dva) uzastopnih prirodnih brojeva.

5. Tri sfere imaju zajedničku tačku $P$, pri čemu ni jedna prava koja sadrži tačku $P$ nije zajednička tangenta za sve tri sfere. Dokazati da te sfere imaju bar još jednu zajedničku tačku.

*IV razred*

1. Neka je niz $(a_n) n \in \mathrm{N}$ takav da je $a_1=a,\ a_2=b$ i

$$a_n = a_{n-1}+a_{n-2}\quad (n \geqq 3).$$

Odrediti $a_n{}^2 - a_{n-1}a_{n+1}$ u funkciji od $n$, $a$ i $b$.

2. Neka se među $n$ ljudi nikoja tri međusobno ne poznaju. Dokazati da je broj parova ljudi koji se uzajamno poznaju najviše $\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

3. Neka $f$ preslikava skup parova realnih brojeva različitih od nule u pozitivne realne brojeve tako da je

$$f(ab, c) = f(a, c)f(b, c),\ f(a, bc) = f(a, b)f(a, c),\ f(a, 1-a) = 1.$$

Tada je $f(a, a) = f(a, -a) = 1$, $f(a, b)f(b, a) = 1$. Dokazati.

4. Dokazati da za $x \geqq 0$ važi nejednakost $x^5+(1-x)^5 \geqq \frac{1}{16}$.

5. Ako polinom $P(x)$ sa celim koeficijentima uzima vrednost 1 u više od tri celobrojne tačke, tada $P(x)$ ne uzima vrednost $-1$ ni u jednoj celobrojnoj tački.

## 1.19. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1979

*I razred*

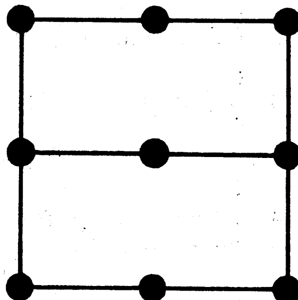
1. Naći sve nenegativne brojeve $a$, $b$, $c$ za koje važi jednakost

$$\sqrt{a-b+c} = \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

2. Naći trocifren broj čije su sve cifre različite od nule, a zbir svih različitih dvocifrenih brojeva sastavljenih od cifara ovog broja jednak je tom broju.

3. Dat je jednakokraki trougao $ABC$ ($AB = AC$) i tačke $E$ i $K$ na polupravama $AB$ i $AC$ takve da je $AE + AK = AB + AC$. Dokazati da je $BC < EK$.

4. Kroz proizvoljnu tačku $P$ na stranici $AB$ trougla $ABC$ konstruisana je prava paralelna sa $CD$, gde je $D$ središte duži $AB$, koja seče $AC$ i $BC$ u tačkama $A_1$ i $B_1$. Dokazati da je $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.



5. U ravni je dato devet tačaka koje su raspoređene kao na slici. Koliko postoji trouglova čije je jedno teme fiksirana tačka ovog skupa, a druga dva temena su ma koje dve od datih tačaka?

## *II razred*

1. Dat je kvadrat $ABCD$. Tačkama $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ stranica $AB$ podeljena je na $n$ jednakih delova. Na dijagonali $AC$ odrediti tačku $P$ tako da zbir kvadrata rastojanja tačke $P$ od tačaka $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ bude minimalan.

2. Naći trocifren broj koji je potpun kvadrat prirodnog broja $a$ i čiji je zbir cifara $a-1$.

3. Neka su $a$, $b$, $c$ pozitivni realni brojevi. Dokazati da nejednakost

$$(b-c)(x-a) + (\sqrt{bc} - \sqrt{ax})^2 > 0$$

važi za svaki realan broj $x > 0$ ako i samo ako je $c$ između $a$ i $b$.

4. U krugu $k$, sa centrom u tački $O$, date su dve paralelne tetive $AB$ i $CD$. Neka je $P$ presečna tačka pravih $AC$ i $BD$, a $Q$ presečna tačka tangenti na krug $k$ u tačkama $B$ i $C$. Dokazati da je petougao $OBQPC$ tetivni i naći geometrijsko mesto centara krugova opisanih oko petouglova $OBQPC$ ako se tetiva $CD$ menja, ostajući pri tome paralelna tetivi $AB$.

5. Nad visinom pravilnog tetraedra ivice $a$, kao nad prečnikom, opisana je sfera. Odrediti površinu onog dela tetraedra koji se nalazi unutar sfere.

## *III razred*

1. Odrediti sve racionalne brojeve $r$ za koje je i $\log_2 r$ takođe racionalan broj.

2. Neka je $0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Dokazati da je tada

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}} \leq x_1^{x_1} \cdot x_2^{x_2} \ldots x_n^{x_n}.$$

3. Ako su $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ uglovi trougla i ako je

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sqrt{3}\,(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma),$$

tada je bar jedan od uglova $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ jednak $\frac{\pi}{3}$. Dokazati ovo.

4. Osnova piramide je jednakostranični trougao, a bočne strane su jednakih površina. Odrediti stranicu trougla osnove ako dužine dve bočne ivice iznose 3 odnosno 4.

5. Dati su: kvadrat stranice 7 i osam kvadrata stranice 3.

a) Može li se veći kvadrat pokriti malim kvadratima tako da su im stranice međusobno paralelne i paralelne stranicama većeg kvadrata?

b) Može li se to učiniti bez uslova paralelnosti stranica?

### *IV razred*

1. Niz $(x_n)$ dat je jednakostima: $x_0=a$ $(a\in\mathbf{R},\ a>0)$, $x_n=\frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}}$ $(n\geq 1)$. Dokazati da je niz $(x_n)$ konvergentan i odrediti $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

2. U prostoru je dato 9 tačaka sa celobrojnim koordinatama. Dokazati da je središte bar jedne duži čiji su krajevi date tačke takođe sa celobrojnim koordinatama.

3. Neka je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. Dokazati da $f(x)$ nije količnik dva polinoma.

4. Neka su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne periodične funkcije sa zajedničkom periodom $T$, definisane na skupu realnih brojeva i neka je

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0.$$

Dokazati da je $f(x)=g(x)$ za svako $x\in\mathbf{R}$.

5. Dokazati da u nizu kvadrata prirodnih brojeva ne postoji beskonačan podniz čiji članovi obrazuju aritmetičku progresiju.

## 1.20. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1980

### *I razred*

1. U ravni $Oxy$ predstaviti skup

$$\{(x,y)\,|\,x+|x|=y+|y|\}.$$

2. Neka je $xy=1$ i $x>y$ $(x, y \in \mathbf{R})$. Dokazati nejednakost

$$\frac{x^2+y^2}{x-y} > 2\sqrt{2}.$$

3. U ravni su date prave $p$ i $q$ koje se seku i tačke $A \in p$ i $B \in q$. Tačke $A$ i $B$ kreću se po pravama $p$ i $q$ stalnim brzinama čiji su intenziteti jednaki. Dokazati da u ravni $(p, q)$ postoji nepokretna tačka $P$ koja je u svakom trenutku jednako udaljena od tačaka $A$ i $B$.

4. Tačke $A$, $B$ i $C$ su težišta trouglova $OMN$, $ONP$ i $OMP$. Dokazati da težišta trouglova $MNP$ i $ABC$ i tačka $O$ pripadaju jednoj pravoj.

5. Odrediti četvorocifren broj $\overline{abcd}$ takav da je $\overline{abcd}+\overline{cbad}=9999$, i razlika $\overline{bc}-\overline{ad}$ najveća.

*II razred*

1. Bez upotrebe tablica dokazati nejednakost

$$\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8>4{,}4.$$

2. Koliko celobrojnih rešenja ima jednačina $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1980}$ ?

3. a) Ako u beskonačnoj aritmetičkoj progresiji celih brojeva postoji član koji je kub celog broja, tada u njoj postoji beskonačno mnogo članova koji su kubovi celih brojeva. Dokazati ovo.

b) Navesti primer beskonačne aritmetičke progresije celih brojeva u kojoj ni jedan član nije kub celog broja.

4. U trouglu $ABC$ je $\sphericalangle ABC=67°30'$, $BC=AD\sqrt{2}$, gde je $AD$ visina iz $A$. Izračunati ugao $\sphericalangle BAC$.

5. Zajedničke spoljašnje tangente dva kruga $k_1(O_1)$ i $k_2(O_2)$ seku zajedničke unutrašnje tangente u tačkama $A, B, C$ i $D$. Dokazati da tačke $A, B, C, D, O_1$ i $O_2$ pripadaju istom krugu.

*III razred*

1. Neka su $p, q, r$ prosti brojevi i $S$ skup svih prirodnih brojeva koji nemaju drugih prostih delilaca osim $p, q, r$. Izračunati

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n}$$

svih recipročnih vrednosti brojeva iz $S$.

2. Ako je $\alpha$ oštar ugao, dokazati da važi nejednakost

$$(1+\operatorname{cosec}\alpha)(1+\sec\alpha) \geqq 3+2\sqrt{2}.$$

3. Neka su $h_a'$, $h_b'$ i $h_c'$ redom prave simetrične visinama trougla $ABC$ u odnosu na simetrale uglova kod temena $A, B$ i $C$. Dokazati da se prave $h_a'$, $h_b'$ i $h_c'$ seku u jednoj tački.

4. Dokazati da među brojevima $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ $(n \in \mathbf{N})$ ima beskonačno mnogo takvih da su svaka dva od njih uzajamno prosti.

5. U lift petospratne zgrade ulazi istovremeno $n$ putnika, od kojih svaki silazi na bilo kom od spratova, počevši od prvog, sa jednakim verovatnoćama. Naći verovatnoću događaja: postoje bar tri uzastopna sprata na kojima ni jedan putnik ne silazi.

### *IV razred*

1. Dokazati da se kvadrat može razložiti na $n$ kvadrata, gde je $n$ prirodan broj veći od 5.

2. Rešiti jednačinu $x^2+y^2+z^2=1980$ u skupu celih brojeva.

3. Neka je $n$ prirodan broj veći od 1.
   a) Dokazati: ako je $n^2+2^n$ prost broj, tada je $n$ neparan broj deljiv sa tri.
   b) Ispitati da li važi obrnuto tvrđenje.

4. Neka su $x_0, x_1, \ldots, x_n$ realni brojevi koji zadovoljavaju uslove:

$$x_0 = x_n = 0,\ x_i > 0\ (i=1, \ldots, n-1);\ x_{i-1}+x_{i+1} \geqq 2x_i \cos\frac{\pi}{k}\ (i=1, \ldots, n-1),$$

gde je $k$ fiksan prirodan broj.
Dokazati da je $n \geqq k$.

5. Dokazati da se prirodan broj $m$ može predstaviti u obliku

$$m = \left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$$

ako i samo ako $m$ nije potpun kvadrat.

## 1.21. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1981

### *I razred*

1. Dokazati da, ako za $a, b, c \in \mathbf{R}$ važi

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

onda za bilo koje neparno $n \in \mathbf{N}$ važi

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}.$$

**2.** Rešiti jednačinu

$$\frac{x-29}{1971}+\frac{x-27}{1973}+\frac{x-25}{1975}+\frac{x-23}{1977}+\frac{x-21}{1979}+\frac{x-19}{1981}$$

$$=\frac{x-1971}{29}+\frac{x-1973}{27}+\frac{x-1975}{25}+\frac{x-1977}{23}+\frac{x-1979}{21}+\frac{x-1981}{19}.$$

**3.** Konstruisati trougao $ABC$ ako su date tačke $A_1$, $B_1$ i $C_1$ takve da je $A_1=\mathcal{S}_B(A)$, $B_1=\mathcal{S}_C(B)$ i $C_1=\mathcal{S}_A(C)$.

**4.** Dat je tetivni četvorougao $ABCD$. Suprotne stranice $AB$ i $DC$ seku se u tački $M$, a stranice $AD$ i $BC$ u tački $N$. Dokazati da su simetrale uglova $ANB$ i $AMD$ normalne među sobom.

**5.** Na tabli su zapisani brojevi 1, 2, 3, ..., 1981. Učenik je izbrisao neka dva broja i umesto njih upisao njihovu razliku. Taj postupak ponovio je više puta i na kraju su na tabli bile upisane samo nule. Dokazati da je u računu načinjena greška.

## *II razred*

**1.** Odrediti interval za $x$ u kome je funkcija

$$y=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+24-10\sqrt{x-1}}$$

konstantna.

**2.** Rešiti nejednačinu

$$1+\log_2 x+\log_2^2 x+\log_2^3 x+\ldots>0.$$

**3.** Neka su $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ središta stranica $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ konveksnog četvorougla $ABCD$, a $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$ preseci duži $DA_1$ i $AB_1$, $AB_1$ i $BC_1$, $BC_1$ i $CD_1$, $CD_1$ i $DA_1$. Dokazati da je površina četvorougla $A_2B_2C_2D_2$ jednaka zbiru površina trouglova $AA_1A_2$, $BB_1B_2$, $CC_1C_2$ i $DD_1D_2$.

4. Date su dve tačke $A$ i $B$, i promenljiva tačka $C$, takva da je $\measuredangle ACB$ konstantan. Neka su $A_1$ i $B_1$ podnožja visina $h_A$ i $h_B$ trougla $ABC$. Dokazati da je duž $A_1B_1$ konstantne dužine.

5. Da li se mogu svi desetocifreni brojevi, čije su cifre 1 i 2, podeliti u dve grupe tako da zbir bilo koja dva broja iz iste grupe sadrži među svojim ciframa bar dve trojke?

## *III razred — A kategorija*

1. Neka je

$$\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3=0,$$

$$\cos x_1+\cos x_2+\cos x_3=1.$$

Dokazati da za neki $x_i\in\{x_1, x_2, x_3\}$ važi

$$\sin x_i=0, \quad \cos x_i=1.$$

2. Dokazati da postoji tačno jedan niz $\{u_n\}$ prirodnih brojeva sa svojstvima $u_1=1$, $u_1<u_2$ i $u_n^3+1=u_{n-1}u_{n+1}$ za svako $n>1$.

3. Neka je $ABCD$ pozitivno orijentisan trapez i $APDQ$ i $BP_1CQ_1$ pozitivno orijentisani kvadrati. Dokazati da je $PP_1=QQ_1$.

4. Odrediti verovatnoću događaja da se u nizu bacanja kocke cifra 1 pojavi pre parne cifre.

5. Ravan je predstavljena kao unija dva disjunktna skupa (koji mogu biti ma kakvog oblika i koji se mogu sastojati iz više delova). Dokazati da postoji jednakokraki pravougli trougao čija su sva tri temena u jednom od skupova.

### *III razred B — kategorija*

1. Dat je trougao $ABC$. Na polupravama $AB$, $AC$, $BC$, $BA$, $CA$ i $CB$ određene su, respektivno, tačke $K$, $L$, $M$, $N$, $P$ i $Q$, takve da je

$$AK=CQ=AC,\ AL=BM=AB \text{ i } BN=CP=BC.$$

Dokazati da su prave $NP$, $QK$ i $LM$ paralelne.

2. Izračunati

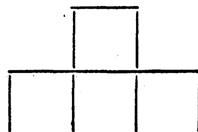
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}\right).$$

3. Dokazati da aritmetički niz čiji je prvi član $a_1=7$ a diferencija $d=4$ sadrži beskonačno mnogo prostih brojeva.

4. Prava koja prolazi kroz koordinatni početak seče prave $x+y-1=0$ i $x-y+1=0$ u tačkama $A$ i $B$. Odrediti geometrisko mesto središta duži $AB$.

5. Data je tablica od $50\times 50$ polja i u svakom je napisan jedan ceo broj.

Ako se bilo koji deo tablice pokrije šablonom prikazanom na slici, zbir pokrivena četiri broja je uvek 4. Odrediti brojeve u tablici.



### *IV razred*

1. Neka su kompleksni brojevi $z_1$, $z_2$, $z_3$ temena pozitivno orijentisanog trougla koji sadrži tačku $O$ (koordinatni početak). Dokazati da je površina ovog trougla jednaka

$$\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2+\bar{z}_2 z_3+\bar{z}_3 z_1).$$

2. Dokazati da postoji tačno jedan niz $\{u_n\}$ prirodnih brojeva sa svojstvima $u_1=1$, $u_1<u_2$ i $u_n^3+1=u_{n-1}u_{n+1}$ za svako $n>1$.

3. Neka je $ABCD$ pozitivno orijentisan trapez i $APDQ$ i $BP_1CQ_1$ pozitivno orijentisani kvadrati. Dokazati da je $PP_1 = QQ_1$.

4. Odrediti verovatnoću događaja da se u nizu bacanja kocke cifra 1 pojavi pre parne cifre.

5. Neka je $R$ ravan i $f$: $R \to R$ bijekcija koja preslikava svaki krug u krug. Dokazati da $f$ preslikava svaku pravu u pravu.

## 1.22. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1982

### *I razred*

1. Dokazati da važi nejednakost $\frac{x^2}{1+x^4} \leqq \frac{1}{2}$.

2. Dokazati da su trouglovi $ABC$ i $A_1B_1C_1$ podudarni ako je $AB = A_1B_1$, $CD = C_1D_1$, gde su $D$ i $D_1$ središta duži $AB$ i $A_1B_1$ i $CB - CA = C_1B_1 - C_1A_1$ ($CB > CA$, $C_1B_1 > C_1A_1$).

3. Pravougli trougao $A_1B_1C$ simetričan je pravouglom trouglu $ABC$ ($\measuredangle C = 90°$) u odnosu na simetralu ugla u temenu $C$. Dokazati da je težišna duž $CM$ trougla $ABC$ normalna na pravoj $A_1B_1$.

4. Poznato je da krokodil ima najviše 68 zuba. Dokazati da između $16^{17}$ krokodila ne moraju postojati dva sa istim rasporedom zuba.

5. Trocifren broj sa različitim ciframa deljiv je dvocifrenim brojem koji se iz njega dobija uklanjanjem jedne, bilo koje njegove cifre, pri čemu se poredak cifara ne menja. Naći sve takve trocifrene brojeve.

### *II razred*

1. Neka je $p$ prost broj veći od 2. Da li postoje prirodni brojevi $x$ i $y$ takvi da je $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2p}$ ?

2. Odrediti sve aritmetičke progresije čija je razlika $d = 2$ i odnos $\frac{S_{3n}}{S_n}$ ne zavisi od $n$ ($S_n$ je zbir prvih $n$ članova progresije).

3. Data su dva kruga koji se spolja dodiruju u tački $C$. Neka su $A$ i $B$ dodirne tačke jedne od njihovih zajedničkih spoljašnjih tangenti. Odrediti stranice trougla $ABC$ u zavisnosti od poluprečnika datih krugova.

4. Oko svake strane tetraedra $ABCD$ opisan je krug. Dokazati: ako su poluprečnici ovih krugova jednaki, tada su sve četiri strane podudarni trouglovi.

5. Komisija za drugi razred zamislila je pet realnih brojeva $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$. Neka su $s_1 \leqq s_2 \leqq \ldots \leqq s_{10}$ vrednosti zbirova $x_1 + x_2, x_1 + x_3, \ldots, x_4 + x_5$ poređane po veličini. Kako ćeš, ako su ti poznati brojevi $s_1, s_2, \ldots, s_{10}$, odrediti brojeve $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$?

### *III razred — A kategorija*

1. Izračunati zbir

$$1+\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}+\ldots+\frac{\cos nx}{\cos^n x} \quad (\cos x \neq 0).$$

2. U kutiji se nalazi 10 belih i 20 crnih kuglica. Iz kutije se izvlači jedna po jedna, ukupno 13, kuglica, bez vraćanja. Odrediti verovatnoću događaja da poslednja izvučena kuglica bude bela.

3. Neka je $p$ prost broj i $n$ prirodan broj. Dokazati da je broj

$$\binom{n}{p}-\left[\frac{n}{p}\right]$$

deljiv sa $p$.

4. Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva različitih od nule, koji zadovoljavaju uslov

$$x_n=\frac{x_{n-2}\cdot x_{n-1}}{2x_{n-2}-x_{n-1}} \quad (n=3,\ 4, \ldots).$$

Dokazati da su svi članovi ovog niza celi brojevi ako i samo ako su $x_1$ i $x_2$ međusobno jednaki celi brojevi.

5. Date su podudarne duži $AB$ i $A_1B_1$. Klizajuća simetrija $G_1$ preslikava duž $AB$ u duž $A_1B_1$, tj. $G_1(A)=A_1$, $G_1(B)=B_1$; klizajuća simetrija $G_2$ preslikava duž $AB$ u duž $B_1A_1$, tj. $G_2(A)=B_1$, $G_2(B)=A_1$.

a) Dokazati da su ose klizajućih simetrija $G_1$ i $G_2$ normalne među sobom.

b) Dokazati da je $G_2G_1$ centralna simetrija.

### *III razred — B kategorija*

1. Date su tačke $A(0, 9)$, $B(3, 6)$ i sistem nejednačina

$$2x-y+a<0, \quad 6x+3y+5a\geqq 0.$$

Za koje vrednosti parametra $a$ će koordinate bar jedne tačke duži $AB$ zadovoljavati dati sistem?

2. Ako su $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ unutrašnji uglovi trougla i ako je

$$\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=1,$$

dokazati da je jedan od uglova $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ jednak $\frac{2\pi}{3}$.

3. Neka su $a$, $b$, $c$ različiti pozitivni brojevi i $P(x)$ polinom šestog stepena. Ako je $P(a)=P(-a)$, $P(b)=P(-b)$, $P(c)=P(-c)$, dokazati da je $P(x)=P(-x)$ za svaki realan broj $x$.

4. Šestougao je opisan oko kruga poluprečnika 10. Dokazati da postoje tačke $P$ i $Q$ šestougla, takve da je $PQ>21{,}2$.

**5.** Funkcija $f$ definisana je za svaki realan broj i za svako $x$ i $y$ važi jednakost

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1,$$

pri čemu je $f(1)=2$.

a) Odrediti $f(m)$, $m$ proizvoljan ceo broj.

b) Odrediti $f(r)$, $r$ proizvoljan racionalan broj.

### *IV razred*

**1.** Isti kao prvi zadatak za III razred—A kategorije.

**2.** Dat je pravilan $2n$-tougao. Koliko ima oštrouglih trouglova čija su temena temena $2n$-tougla?

**3.** Isti kao treći zadatak za III razred—A kategorije.

**4.** Svaka od 9 datih pravih dele dati kvadrat na dva četvorougla čiji je odnos površina 2:3. Dokazati da se neke tri od tih pravih seku u jednoj tački.

**5.** Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ međusobno različiti celi brojevi. Dokazati da se polinom

$$P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$$

ne može predstaviti u obliku proizvoda dva polinoma sa celim koeficijentima koji su različiti od konstante.

## 1.23. SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA SRBIJA, APRILA 1983

### *I razred*

**1.** Za koje vrednosti $p$ i $q$ je polinom $P(x)=2x^4-x^3+x^2+px+q$ deljiv polinomom $Q(x)=x^2-3x+2$?

**2.** Dokazati implikaciju $x^2+y^2 \leqq 2 \Rightarrow |x+y| \leqq 2$.

**3.** Površina trapeza $ABCD$ ($AD \| BC$) jednaka je 1. Kolika je najmanja dužina veće dijagonale trapeza?

**4.** Neka je $K$ središte težišne duži $CC_1$ trougla $ABC$ i neka je $AK \cap BC = M$. Dokazati da je $CM : MB = 1 : 2$.

**5.** Na stolu su knjige koje treba spakovati. Ako bismo ih pakovali po 4, 5 ili 6, svaki put bi ostala po jedna knjiga, a ako ih pakujemo po 7, sve bi bile spakovane.

a) Koliko najmanje knjiga može biti na stolu?

b) Naći sva ostala rešenja za broj knjiga na stolu.

## II razred

1. Rešiti jednačinu $\sin x+\cos x+\sin x \cos x=1$.

2. Dat je pravilni tetraedar $ABCD$. Tačke $M$, $N$, $P$ i $Q$ pripadaju redom ivicama $AD$, $AC$, $BD$ i $BC$, tako da je

$$\frac{AM}{AD}=\frac{AN}{AC}=\frac{BP}{BD}=\frac{BQ}{BC}=k.$$

Odrediti odnos zapremina $V_{ABMNPQ}$ i $V_{ABCD}$.

3. U tupouglom trouglu $ABC$ tačke $A_1$, $B_1$ i $C_1$ su podnožja visina. Ako je trougao $ABC$ sličan trouglu $A_1B_1C_1$, odrediti uglove trougla $ABC$.

4. Rešiti nejednačinu $(2^{2x}+3)^{-1} \geqq (2^{x+2}-1)^{-1}$.

5. a) Prirodan broj $n$ ima tačno 80 različitih delilaca iz skupa prirodnih brojeva, uključujući brojeve 1 i $n$. Dokazati da je proizvod svih 80 delilaca broja $n$ jednak $n^{40}$.

b) Prirodan broj $n$ ima tačno 1983 različita činioca iz skupa prirodnih brojeva, uključujući brojeve 1 i $n$. Dokazati da je broj $n$ potpun kvadrat.

## III razred — A kategorija

1. U skupu realnih brojeva rešiti sistem jednačina

$$x+y=z, \quad x^2+y^2=z, \quad x^3+y^3=z.$$

2. Funkcija $f$ koja je definisana za sve cele brojeve i uzima realne vrednosti, zadovoljava uslove:

1° $f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$ za svako $x$ i $y$;

2° $f(0)\neq 0$.

Naći sve takve funkcije $f$ ako je

a) $f(1)=5/2$;

b) $f(1)=\sqrt{3}$.

3. U kutiji se nalazi $p$ belih i $q$ crnih kuglica. Pored toga je data posuda sa dovoljno crnih kuglica. Nasumice se iz kutije vade dve kuglice. Ako su iste boje, u kutiju se stavi crna kuglica iz posude; a ako su različitih boja, bela kuglica se vraća u kutiju. Postupak se ponavlja dok se poslednji par kuglica ne izvadi iz kutije i zatim poslednja kuglica ne stavi u nju. Kolika je verovatnoća da je ta poslednja kuglica bela?

4. Na stranicama $CA$ i $CB$ jednakostraničnog trougla $ABC$ sa centrom $M$ izabrane su, redom, tačke $D$ i $E$ takve da je $CD=CE$. Ako je tačka $F$ takva da je četvorougao $DMBF$ paralelogram, dokazati da je trougao $MEF$ jednakostraničan.

5. Po završetku jednog šahovskog turnira ispostavilo se da je svaki učesnik osvojio tačno polovinu svoih poena igrajući sa igračima koji su zauzeli poslednja tri mesta. Koliko je učesnika bilo na turniru?

### *III razred — B kategorija*

1. Isti kao prvi zadatak za III razred — A kategorija.

2. Neka su $f$ i $g$ realne funkcije i neka za svako realno $x$ i $y$ važi

$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y).$$

a) Ako je $f$ periodična funkcija, dokazati da je i $g$ periodična.
b) Ako je $g$ periodična, da li i $f$ mora biti periodična?

3. Naći sva rešenja jednačine $\sin^{2m}x+\cos^{2n}x=1$, gde su $m$ i $n$ prirodni brojevi od kojih je bar jedan veći od 1.

4. Isti kao četvrti zadatak za III razred — A kategorija.

5. Isti kao peti zadatak za III razred — A kategorija.

### *IV razred*

1. Rešiti sistem jednačina $x+y=z$, $x^2+y^2=z$, $x^3+y^3=z$.

2. Dat je tetraedar $ABCD$. Neka bisektorna ravan diedra kod ivice $AB$ seče ivicu $CD$ u tački $M$. Dokazati da je $MC:MD=S(ABC):S(ABD)$.
($S(ABC)$ i $S(ABD)$ su površine trouglova $ABC$ i $ABD$.)

3. Odrediti minimum funkcije $f(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz}$ $(x,y,z>0)$.

4. Odrediti celobrojna rešenja jednačine $x^2=3^y+7$.

5. Dokazati da broj $(2+i)^n$ nije realan ako je $n$ prirodan broj.

# 2. SAVEZNA TAKMIČENJA

## 2.1. PRVO SAVEZNO TAKMIČENJE, MAJA 1960

### *III razred*

**1.** Posuda ima oblik kvadra. Baza je pravougaonik obima 4 cm. Visina kvadra je $h = 5$ cm.

(a) Kolike treba da su osnovne ivice $a$ i $b$, pa da posuda ima maksimalnu zapreminu?

(b) U kom intervalu je funkcija zapremine definisana?

(c) Nacrtati grafik te funkcije.

Ako je data osnovna ivica i visina, kako zavisi zapremina od obima osnove? Koje vrednosti može da ima obim osnove? Prikazati ovo grafički i tabelarno ($a = 2$ cm, $h = 5$ cm).

**2.** Kolika je ivica kocke koja je upisana u pravilnoj trostranoj piramidi osnovne ivice $a$ i visine $h$ tako da četiri temena leže u bazi a četiri na bočnim stranama piramide?

**3.** Odrediti sve vrednosti $x$ za koje je $\log_{1/2}(x^2 - 4x - 3) > -3$.

**4.** Dat je krug $c$ sa centrom u tački $O$ i poluprečnikom $R$. Tačka $O_1$ koja se nalazi na periferiji datog kruga centar je drugog kruga čiji je poluprečnik $r = R/2$.

Ako su $A$ i $B$ presečne tačke ova dva kruga, izračunati približnu vrednost ugla $AOB$ (u radijanima), a zatim zapreminu zajedničkog dela dve sfere koje nastaju rotacijom ova dva kruga oko prave $OO_1$.

**5.** Dokazati identitet

$$(1 - \cos b \cos c)^2 - 2(1 - \cos b \cos c) + \sin^2 b \sin^2 c - \sin^2 b - \sin^2 c = 0.$$

### *IV razred*

**1.** Dokazati da je proizvod tri uzastopna broja deljiv sa $7 \cdot 8 \cdot 9$ ako je srednji broj kub nekog drugog broja.

**2.** Uočiti krug $(O, r)$, jedan njegov prečnik $AB$ i jednu tačku $M$ na krugu. Tačka $M$ ortogonalno se projektuje u tačku $Q$ na $AB$. Prava $AN$ ($N$ je sredina

duži $MQ$) seče dati krug u $D$. Odrediti jednačinu geometrijskog mesta preseka $P$ pravih $BD$ i $QM$, kad se tačka $M$ kreće po krugu $(O, r)$.

**3.** Razlika recipročnih vrednosti dva uzastopna cela broja iznosi $0{,}0\dot{a}$ gde je $a$ jedna od 9 cifara: 1, 2, 3, 4, . . . , 9. Za koje $a$ zadatak ima rešenja i koliko?

**4.** Kroz proizvoljnu tačku u unutrašnjosti trougla prolaze tri prave linije paralelno stranama trougla. Ove prave dele površinu trougla na 6 delova, od kojih su tri trougla sa površinama $s_1$, $s_2$, $s_3$. Kolika je površina trougla?

**5.** Data je familija krivih $y=(m-1)x^2+2mx+4$.

(a) Dokazati da sve krive date familije prolaze kroz dve fiksne tačke $A$ i $B$ i odrediti ih.

(b) Odrediti krivu date familije koja dodiruje $x$-osu, a zatim odrediti onu krivu čije teme leži u tački $B$ ($B$ ne leži na $x$-osi).

## 2.2. DRUGO SAVEZNO TAKMIČENJE, MAJA 1961

### *III razred*

**1.** Ako su $x_1$ i $x_2$ rešenja jednačine $x^2+kx+1=0$, odrediti one vrednosti $k$ za koje važi nejednakost

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2>2.$$

**2.** Odrediti najveću vrednost funkcije

$$\log_2{}^4 x+12\log_2{}^2 x\cdot\log_2\left(\frac{8}{x}\right)$$

ako $x$ varira u intervalu $1\leq x\leq 64$.

**3.** Prav valjak i kupa imaju zajedničku osnovu, a vrh kupe nalazi se u središtu druge osnove valjka. Odrediti ugao koji zaklapaju izvodnica kupe i osa valjka, ako je razmera površina valjka i kupe $7:4$.

**4.** Stranice trougla $ABC$ su $a$, $b$, $c\,(a<b<c)$. Nad njima konstruisani su slični pravougaonici, tako da je površina $P$ pravougaonika nad stranicom $c$ veća od zbira površina ostala dva pravougaonika za površinu kvadrata čija je stranica $m$. Naći visine tih pravougaonika. Izvršiti diskusiju prema dužini stranice $m$.

### *IV razred*

**1.** Dat je opšti član niza $a_n=\dfrac{c^2+n-2}{2}$ ($c$ prirodan broj).

(a) Napisati niz i odrediti zbir prvih $n$ članova.

(b) Napisati izraz za $S_n$ kada je $n=c$ i dokazati da je brojilac zbira deljiv sa 25, ako je $c=10k+1$ ($k$ prirodan broj).

**2.** Dokazati da je zbir kvadrata rastojanja proizvoljne tačke kruga do svih temena jednakostraničnog trougla upisanog u taj krug stalna veličina.

3. Odrediti $\lambda$ tako da prava $x-(\lambda+2)y-\lambda-4=0$ bude udaljena od središta kruga $x^2+y^2+4x-4y-17=0$ za dužinu $5/\sqrt{2}$.

Tangente koje dodiruju krug u presečnim tačkama sa datom pravom i sama prava obrazuju trougao. Odrediti površinu lika koji zajednički pokrivaju krug opisan oko tog trougla i dati krug (za $\lambda$ uzeti celobrojno rešenje).

4. Dokazati da $a$, $b$, $c$ mogu biti stranice trougla tada i samo tada kada je nejednakost $a^2p+b^2q>c^2pq$ ispunjena za sve parove realnih brojeva $p$ i $q$ za koje je $p+q=1$.

## 2.3. TREĆE SAVEZNO TAKMIČENJE, MAJA 1962

### *III razred*

1. Data je funkcija $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$. Dokazati da za sve vrednosti $x_1$ i $x_2$ važi

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

2. Date su lopte poluprečnika $R$ i $r$ $(R>r)$ sa centralnom razdaljinom $c\,(R-r<c<R+r)$. Izraziti zapreminu kupe koja je opisana oko tih lopti kao funkciju $R$, $d=R-r$ i $c$. Dokazati da je razmera zapremina te kupe i zapremine veće lopte $\geqq 2$. Izračunati površinu one kupe za koju je taj odnos 2.

3. Kvadrat $ABCD$ stranice $a$ izvršio je rotaciju od $45^0$ u negativnom smeru oko temena $A$. Stranica $C_1D_1$ tako nastalog kvadrata seče stranicu $BC$ datog kvadrata u tački $M$. Kolika je površina kvadrata konstruisanog nad $AM$?

4. Data je funkcija $f(x)=A\cos x+B\sin x$ $(A,\ B$ konstante). Dokazati da je $f(x)=0$ ako je $f(x_1)=f(x_2)=0$ $(x_1-x_2\neq k\pi;\ k$ ceo broj).

### *IV razred*

1. Dokazati da funkcije $\log x$, $\log\sqrt{x}$, $\log\sqrt[4]{x}$, ... čine geometrijsku progresiju. Naći zbir te progresije i nacrtati tako dobijenu funkciju.

2. Date su funkcije $y_1=\sin^4 x+\cos^4 x$ i $y_2=\sin^6 x+\cos^6 x$. Dokazati da ove funkcije imaju osnovni period $\frac{\pi}{2}$ i da je $3y_1-2y_2=1$.

Za koje vrednosti $x$ prva funkcija ima za $1/16$ veću vrednost od druge?

3. U trouglu $ABC$ date su stranice $a$ i $b$. Izračunati dužinu treće stranice ako se zna da je njena dužina jednaka dužini odgovarajuće visine. Za koje $a$ i $b$ zadatak ima rešenja?

4. U ravni $\alpha$ data je prava $p$ i tačka $P$ koja ne leži na $p$. Odrediti geometrijsko mesto tačaka $M$ u ravni $\alpha$ za koje važi $\frac{MP}{MN}=e$, gde je $N$ podnožje normale iz tačke $P$ na pravu $p$, $e$ dati broj. Izvršiti diskusiju.

## 2.4. ČETVRTO SAVEZNO TAKMIČENJE, MAJA 1963

### *III razred*

**1.** Dokazati da svaki realan koren $x_1$ jednačine $x^2+px+q=0$ ($p$ i $q$ realni brojevi) ispunjava uslov

$$x_1 \geq \frac{4q-(p+\lambda)^2}{4\lambda},$$

gde je $\lambda$ proizvoljan pozitivan broj.

**2.** Rešiti i diskutovati nejednačinu

$$\frac{x}{x-a}-\frac{2a}{x+a}>\frac{8a^2}{x^2-a^2} \quad (a \text{ proizvoljan realan broj}).$$

**3.** Neka su $a$, $b$, $c$ stranice trougla i $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ njegovi uglovi. Dokazati da oštri uglovi $x$, $y$, $z$, određeni jednačinama

$$\cos x=\frac{a}{b+c}, \qquad \cos y=\frac{b}{a+c}, \qquad \cos z=\frac{c}{a+b},$$

zadovoljavaju jednakosti

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}=1,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

**4.** Osnova piramide je paralelogram. Kroz jednu ivicu njegove osnove i srednju liniju njegove bočne strane naspram te ivice postavljena je ravan. U kome odnosu deli ova ravan zapreminu piramide?

### *IV razred*

**1.** Iz kvadrata stranice $2a$ iseći četiri jednakokraka trougla čije se osnovice podudaraju sa stranicama kvadrata i čije su visine $x$. Preostali deo kvadrata predstavlja mrežu pravilne četvorostrane piramide.

1° Izraziti zapreminu te piramide kao funkciju od $x$.

2° Odrediti $x$ tako da zapremina $V$ bude maksimalna.

3° Skicirati grafik funkcije $V(x)$.

**2.** Dokazati da u jednakokrakom trouglu sa osnovicom $c$, krakom $a$ i simetralom $t$ ugla na osnovici važi jednakost $t^2=ac^2(2a+c)/(a+c)^2$.

**3.** Neka je $AB$ prečnik kruga $K$ radijusa $R$ koji leži u ravni $\alpha$ i neka je $S$ tačka na normali ravni $\alpha$ u tački $B$. Kroz tačku $S$ postavljena je ravan $\beta$ tako da je normalna na ravni $ABS$ i da sa ravni $\alpha$ čini ugao $\pi/3$.

1° Odrediti granicu za $x=BC$ tako da ravan $\beta$ seče krug $K$ u dve tačke $C$ i $D$.

2° Dokazati da su uglovi $SCA$ i $SDA$ pravi.

3° Odrediti zbir kvadrata ivica tetraedra $SDAC$ kao funkciju od $x$ i $R$.

4° Ako je $y$ ovaj zbir, odrediti geometrijsko mesto ekstremuma te funkcije kada $R$ varira.

**4.** Odsečak pokretne tangente parabole $y^2=2px$, ograničen dvema fiksnim tangentama parabole, ortogonalno se projektuju na direktrisu parabole tako da je dužina te projekcije konstantna. Dokazati.

## 2.5. PETO SAVEZNO TAKMIČENJE, MAJA 1964

### *III razred*

**1.** Odrediti geometrijsko mesto tačaka $(a, b)$ u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oab$ tako da jednačina $x^4-2(a-b)x^2+2(4-ab)=0$ ima realna rešenja.

**2.** Ako je $r$ poluprečnik upisanog kruga nekog nedegenerisanog trougla površine $p$ i $s_\alpha$, $s_\beta$, $s_\gamma$ dužine simetrala njegovih unutrašnjih uglova, dokazati da je $rs_\alpha s_\beta s_\gamma \leqq p^2$, gde znak jednakosti važi samo za jednakostranični trougao.

**3.** Jednakokraki trougao sa uglom $\alpha$ na osnovici je osnova jedne piramide čije sve bočne ivice zahvataju sa osnovom jednake uglove $\varphi=90^0-\alpha$.

Ravan koja prolazi kroz visinu piramide i vrh jednakokrakog trougla u osnovi seče piramidu po figuri čija je površina $p$. Izračunati zapreminu piramide.

**4.** Jednakostranični trougao $ABC$, čije su stranice vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ortogonalno projektovati na proizvoljnu osu. Odrediti ugao jedne od tih stranica prema osi tako da zbir trećih stepena projekcija vektora $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ bude jednak nuli.

### *IV razred*

**1.** Data je funkcija $y=xe^{-\alpha x^2}$, gde je $\alpha$ pozitivna konstanta.

(a) Ispitati tok ove funkcije za proizvoljno $\alpha$ i nacrtati njen grafik za $\alpha=2$.

(b) Ekstremne tačke date funkcije menjaju sa $\alpha$ svoj položaj u $xy$-ravni. Odrediti krivu $y=f(x)$ na kojoj se nalaze sve te ekstremne tačke.

(c) Naći površinu $P(b)$ dela ravni ograničenog lukom grafika date funkcije, $x$-osom i pravom $x=b\,(b>0)$. Kolika je granična vrednost površine $P(b)$ kada $b\to+\infty$?

**2.** Tri lopte dodiruju jednu ravan u tačkama $A$, $B$, $C$, gde je $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Odrediti radijuse ovih lopti ako se zna da se dve i dve lopte međusobno dodiruju.

**3.** Mogu li brojevi $2$, $\sqrt{6}$, $4\frac{1}{2}$ biti članovi jedne iste aritmetičke ili jedne iste geometrijske progresije?

**4.** Dokazati da je nejednakost $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2>\frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4)$, gde su $a$, $b$, $c$ pozitivni brojevi, potreban i dovoljan uslov da $a$, $b$, $c$ budu dužine stranica trougla.

**5.** Date su dve paralelne prave $a_1$ i $a_2$ i $m$ tačaka na $a_1$ i $n$ tačaka na $a_2$. Svaka od $m$ tačaka prave $a_1$ spojena je sa svakom od $n$ tačaka prave $a_2$. Ako se ni u jednoj tački između $a_1$ i $a_2$ ne seče više od dva odsečka, koliki je broj tih presečnih tačaka?

## 2.6. ŠESTO SAVEZNO TAKMIČENJE, MAJA 1965

### *III razred*

**1.** Rešiti jednačinu

$$x^3-(m^2+3)x^2+(m^2+3)x+m^2-1=0$$

po nepoznatoj $x$, rastavljajući polinom $P(m)$ na levoj strani na faktore.

**2.** Izračunati ivice kvadra ako je poznat njihov zbir $s$ i njegova dijagonala $d$, a jedna od ivica je geometrijska sredina druge dve ivice. Kada je zadatak mogućan?

**3.** Naći sva realna rešenja $x\,(0<x<2\pi)$ nejednačine

$$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}>1.$$

**4.** U paralelepipedu čije su strane podudarni rombovi sa uglom od $60^0$ poznata je najveća dijagonala $D$. Odrediti ivice i dijagonale tela.

### *IV razred*

**1.** Odrediti zbir svih brojeva u tabeli

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k,\\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ k+1,\\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ k+2,\\ \vdots \\ k,\ k+1,\ k+2,\ \ldots,\ 2k-1. \end{array}$$

**2.** Data je funkcija $y=x^3+px+q$.

(a) Ako je $M$ maksimum i $m$ minimum date funkcije, dokazati da je

$$Mm=q^2+\frac{4}{27}p^3;$$

(b) Odrediti $p$ i $q$ tako da je jedna nula date funkcije $-2$ i $M-m=4$, i ispitati odgovarajuću funkciju.

**3.** Dat je konveksan petougao $A_1A_2A_3A_4A_5$ i na svakoj njegovoj stranici po jedna tačka $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$. U petouglu su povučene sve dijagonale i iz svake tačke $B_i$ $(i=1, 2, \ldots, 5)$ povučene su prave kroz temena petougla i kroz ostale tačke $B_i$.

Ako se zna da se, ne računajući tačke $A_i$ ni tačke $B_i$, nikoje tri od tih pravih (i dijagonala) ne seku u jednoj tački i da među ovim pravama i

dijagonalama nema paralelnih, odrediti broj svih tačaka u kojima se seku po dve od tih pravih.

**4.** Na ivici triedra, kod koga su kod vrha $S$ sva tri ivična ugla jednaka nanete su duži $SA = SB = SC = l$. Odrediti ivični ugao tako da zapremina tetraedra $SABC$ bude maksimalna.

## 2.7. SEDMO SAVEZNO TAKMIČENJE, MAJA 1966

### *III razred*

**1.** Naći četvorocifreni broj koji je potpun kvadrat i kod kojeg su kako prve dve cifre tako i dve poslednje cifre jednake.

**2.** Dokazati da se zapremine tetraedara koji imaju jedan zajednički triedar odnose kao proizvodi njihovih ivica koje se sastaju u vrhu toga triedra.

**3.** Odrediti sve vrednosti $x$ iz intervala $[0, 2\pi]$ koje zadovoljavaju nejednačinu

$$2\,(\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x) > (\sqrt{3} - 1)\sin^2 2x.$$

**4.** Rešiti sistem jednačina

$$x + y + z = 1, \quad ax + by + cz = d, \quad a^2x + b^2y + c^2z = d^2,$$

gde su $a$, $b$, $c$ i $d$ realni parametri i $|a| \neq |b|$, $|b| \neq |c|$, $|a| \neq |c|$.

**5.** Krugovi $K'$ i $K''$ dodiruju se spolja a njihova zajednička spoljašnja tangenta dodiruje ih u tačkama $A_1$ i $A_2$. Obeležimo sa $E$ presek te spoljašnje tangente i zajedničke unutrašnje tangente krugova i sa $C_1$ i $C_2$ centre tih krugova.

(a) Dokazati da je trougao $C_1EC_2$ pravougli.

(b) Ako se krugovi $K'$ i $K''$ zajedno sa odsečkom $A_1A_2$ svoje zajedničke tangente obrću oko prave $C_1C_2$, odsečak $A_1A_2$ opisuje omotač zarubljene kupe koji dodiruje dve sfere (sa centrima $C_1$ i $C_2$). Izračunati površinu omotača $M$ zarubljene kupe.

(c) Ako su radijusi $R_1$ i $R_2$ tih sfera promenljivi, a njihov zbir $R_1 + R_2 = a$ ($=$ const), izračunati maksimalnu vrednost površine $M$.

### *IV razred*

**1.** Ako su $x_1$, $x_2$, $x_3$ koreni jednačine $x^3 - 1 = 0$, dokazati

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n = x_1^n x_2^n + x_2^n x_3^n + x_3^n x_1^n.$$

**2.** Date su tri crne kuglice numerisane sa 1, tri crne kuglice numerisane sa 2 i tri grupe od po šest belih kuglica numerisanih respektivno sa 1, 2 i 3.

Od datih kuglica treba poređati u niz 9 kuglica tako da se odaberu 3 crne i 6 belih kuglica. Na koliko načina se to može postići?

**3.** Dokazati da razlomak $\dfrac{3n+1}{2n^2+n}$ ($n$ prirodan broj) ne može da se skrati.

**4.** Neka je $x_1$ fiksiran, proizvoljan realan broj i $x$ skup takvih realnih brojeva da njihova razlika nije veća od 1/100, tj. $|x-x_1| \leq \frac{1}{100}$.

(a) Dokazati da za sve tačke $x$ i $x_1$ intervala $\delta=(x_1-1/100,\ x_1+1/100)$ razlika vrednosti funkcije $\sin x$ nije veća od 1/100.

(b) Da li za funkciju $\sin x^2$ možemo odrediti dužinu intervala navedenog pod (a) tako da je

$$|\sin x^2-\sin x_1^2| \leqq 1/100 \qquad (x,\ x_1 \in \delta),$$

gde je $\delta$ interval konačne dužine koji ne zavisi od izbora tačke $x_1$.

**5.** Isti kao za III razred.

## 2.8. OSMO SAVEZNO TAKMIČENJE, MAJA 1967

### *II razred*

**1.** Dat je trinom $(k+1)x^2-2kx+k-1$, gde je $k$ promenljivi parametar.

a) Odrediti geometrijsko mesto temena svih parabola datih jednačinom

$$y=(k+1)x^2-2kx+k-1.$$

b) Da li sve te parabole imaju zajedničkih tačaka?

c) Dokazati da je samo jedan koren jednačine

$$(1) \qquad (k+1)x^2-2kx+k-1=0$$

promenljiv i pokazati to na grafiku.

d) Odrediti za koji ceo broj $k$ je promenljivi koren jednačine (1) periodičan decimalan broj sa jednom cifrom u periodu.

**2.** Dat je trinom $9n^2+3n-2$ ($n$ ceo broj).

a) Dokazati da ni za jedno $n$ ovaj trinom nije deljiv sa 9.

b) Dokazati da je dati trinom deljiv sa 4 za beskonačno mnogo celih brojeva $n$. Kakav je tada opšti oblik broja $n$?

**3.** Dat je kvadrat $Q$ strane $a$ u koji je upisan kvadrat $Q_1$ tako da mu temena leže na stranama kvadrata $Q$. U kvadrat $Q_1$, kao i u sva četiri dobijena trougla upisani su krugovi. Odrediti položaj temena upisanog kvadrata $Q_1$ tako da zbir površina svih pet upisanih krugova dude minimalan.

**4.** Data je neprozirna kugla i izvan nje ravan $\alpha$. U tački $M$ ravni $\alpha$ nalazi se pokretan svetlosni izvor koji osvetljava kuglu. Dokazati da zamišljena ravan, koja odvaja osvetljeni od neosvetljenog dela kugle, prolazi kroz fiksnu tačku $P$ koja ne zavisi od položaja tačke $M$.

### *III razred*

**1.** Rešiti jednačinu

$$\sqrt{5x+1}+2\sqrt{4-x}+\sqrt{5}\sqrt{x+2}=\sqrt{61-4x}.$$

2. Unutar datog ugla $AOB$ nalazi se krug koji nema nijednu zajedničku tačku sa kracima toga ugla. Odrediti na krugu tačke $M$ i $N$ tako da zbir rastojanja tih tačaka od krakova ugla bude najveći odnosno najmanji (koristiti se stavom: zbir rastojanja proizvoljne tačke na osnovici jednakokrakog trougla od krakova tog trougla jednak je visini koja odgovara kraku).

3. Rešiti nejednačinu

$$(1+\sqrt{3})\sin 2x + 2\cos^2 x \geqq 2(1+\sqrt{3}\cos^2 x).$$

4. Neka su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ dva paralelograma koji leže u neparalelnim ravnima i obeležimo redom sa $M$, $N$, $P$ i $Q$ tačke koje dele duži $AA'$, $BB'$, $CC'$ i $DD'$ u istom odnosu.

a) Dokazati da je $MNPQ$ paralelogram.

b) Odrediti geometrijsko mesto središta svih paralelograma $MNPQ$ koji se dobijaju kada tačka $M$ opisuje duž $AA'$.

### *IV razred*

1. a) Naći skup tačaka u kojima familija funkcija

$$f(x)=\frac{4x^3}{p^2}-3x+p \tag{1}$$

dostiže maksimum i skup tačaka u kojima ista familija dostiže minimum. Nacrtati grafik one funkcije iz (1) za koju je $p=1$ i odrediti tačke u kojima odgovarajuća kriva seče $x$-osu.

b) Prikazati $\cos 3t$ kao funkciju od $\cos t$ i smenom $x=\cos t$ naći nule funkcije

$$f(x)=4x^3-3x+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nacrtati grafik ove funkcije.

2. Strana $BC$ trougla $ABC$ podeljena je tačkama $M_0=B$, $M_1$, $M_2$, ..., $M_{n-1}$, $M_n=C$ na $n$ delova i iz ovih tačaka su do strana $AB$ i $AC$ povučene duži paralelne strani $AC$, odnosno $AB$.

a) Na koliko se različitih načina može iz tačke $A$ stići po dobijenoj mreži do tačke $M_k (k=0, 1, \ldots, n)$ ako je kretanje dozvoljeno u smeru vektora $\overrightarrow{AB}$ i u smeru vektora $\overrightarrow{AC}$?

b) Koliko ima svih gore opisanih puteva koji vode od tačke $A$ do svih tačaka $M_0$, $M_1$, ..., $M_n$?

c) Ako su tačke $M_k (k=0, 1, \ldots, n)$ ekvidistantne, izračunati ukupnu dužinu svih putanja $AM_k$.

3. Dokazati identitet:

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{cotg} x-\operatorname{cotg} 2^n x \quad (n \in \mathrm{N}).$$

4. Isti kao 4. zadatak za III razred.

## 2.9. DEVETO SAVEZNO TAKMIČENJE, MAJA 1968

### *II razred*

1. Odrediti celobrojna rešenja jednačine

$$\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}.$$

2. U ravni $\pi$ date su četiri tačke $A$, $B$, $C$ i $D$. Konstruisati krug koji leži u toj ravni, prolazi kroz tačke $A$ i $B$ tako da su tangentne duži tangenata povučenih iz tačaka $C$ i $D$ jednake.

3. Sfera prolazi kroz sredine triju bočnih ivica trostrane piramide i dodiruje svaku osnovnu ivicu u njenoj sredini.

a) Dokazati da je ta piramida pravilna.

b) Izračunati poluprečnik te sfere ako su osnovna ivica i visina bočne strane jednake datoj duži $a$.

4. Odrediti sve realne brojeve $a$ za koje nijedna vrednost $x$ koja zadovoljava nejednačinu $ax^2+(1-a^2)x-a>0$ nije po apsolutnoj vrednosti veća od 2.

### *III razred*

1. Rešiti sistem jednačina

$$x^m=y^n, \quad \log_a\frac{x}{y}=\frac{\log_a x}{\log_a y}.$$

2. U ravni $Oxy$ odrediti skup tačaka čije koordinate $(x, y)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ zadovoljavaju relaciju

$$\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x})<y<1+\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin 4x}+\sqrt{1-\sin 4x}).$$

3. Teme pravog ugla nalazi se u koordinatnom početku, a njegovi kraci klize po paraboli $y^2=2px$ i seku parabolu u tačkama $X$ i $Y$.

a) Odrediti skup tačaka (geometrijsko mesto) sredina duži $XY$.

b) Dokazati da sve prave $XY$ imaju zajedničku tačku.

4. a) Dokazati identitet

$$(x+y+z)^2=\frac{1}{2}((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)+3(xy+yz+zx).$$

b) Odrediti kakve treba da postoje veze između $x$, $y$, $z$ da bi izraz $xy+yz+zx$ imao maksimalnu vrednost ako je zbir $x+y+z=s$ konstantan.

c) Na osnovu dobijenog rezultata rešiti problem: Poznato je da je vrednost dijamanta proporcionalna kvadratu njegove težine. Ako se jedan dijamant podeli na 3 komada čije su težine $x$, $y$, $z$ dokazati da je ukupna vrednost uvek manja od vrednosti celog komada i da je ona najmanja kada se dijamant podeli na tri komada jednake težine.

### *IV razred*

**1.** Neka su $p$ i $q$ prosti brojevi, broj $q^3-1$ deljiv sa $p$ i broj $p-1$ deljiv sa $q$. Dokazati da je $p=1+q+q^2$.

**2.** U razredu ima 25 učenika. Dokazati da se od njih ne može formirati više od 30 košarkaških ekipa sa po 5 igrača u svakoj, ako ma koje dve od njih nemaju više od jednog igrača koji je član obe ekipe.

**3.** U pravouglom trouglu $ABC$ ($\sphericalangle B=90^0$) dati su ugao $\alpha$ kod temena $A$ i hipotenuzina visina $BA_1=h_1$. Iz tačke $A_1$ spuštena je normala $A_1B_1$ na $BC$, iz tačke $B_1$ normala $B_1A_2$ na $AC$, iz tačke $A_2$ normala $A_2B_2$ na $BC$, itd. U svaki od trouglova $ABA_1$, $BA_1B_1$, $A_1B_1A_2$, $B_1A_2B_2$, itd. upisan je krug.

a) Izračunati zbir površina svih tih krugova.

b) Odrediti ugao $\alpha$ tako da taj zbir bude maksimalan.

**4.** Isti kao 4. zadatak za III razred.

## 2.10. DESETO SAVEZNO TAKMIČENJE, MAJA 1969

### *II razred*

**1.** Koja relacija, nezavisna od $m$, postoji između rešenja jednačine

$$(x^2-6x+5)+m(x^2-5x+6)=0?$$

**2.** Dokazati da je za svaki prirodan broj $n$ bar jedan od brojeva $3^{3n}+2^{3n}$ i $3^{3n}-2^{3n}$ deljiv sa 35.

**3.** Data su dva kruga sa centrima $O$ i $O'$ i poluprečnicima $R$ i $\frac{R}{2}$. Krugovi se dodiruju iznutra u tački $A$.

Konstruisati krug koji dodiruje oba data kruga i pravu $OO'$.

**4.** U trostranoj piramidi svi uglovi bočnih strana pri vrhu piramide su pravi. Dokazati da vrh piramide, težište osnove i centar opisane sfere oko piramide leže na istoj pravoj.

### *III razred*

**1.** Trostrana piramida $OABC$ ima bočne ivice $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ i $\sphericalangle AOB=\sphericalangle BOC=\sphericalangle COA=90^0$. Ako se sa $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ obeleže respektivno uglovi kod temena $A$, $B$, $C$ osnove $ABC$, dokazati da je

$$\operatorname{cotg}\alpha:\operatorname{cotg}\beta:\operatorname{cotg}\gamma=a^2:b^2:c^2.$$

**2.** Odrediti sva realna rešenja sistema jednačina:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1,$$
$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1,$$
$$\vdots$$
$$x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=1.$$

**3.** Data je pravilna četvorostrana prizma sa osnovnom ivicom $2a$ i visinom $a(1+\sqrt{3})$. Jedna sfera prolazi kroz sva četiri temena donje osnove i dodiruje gornju osnovu. Izračunati onaj deo površine prizme koji je unutar sfere.

**4.** Isti kao 1. zadatak za IV razred.

### *IV razred*

**1.** Neki kratkovidi mudrac koji vidi predmete samo na rastojanju manjem od 1m, sklopio je ovakvu opkladu: Ako se bilo gde na rastojanju $d$ metara od njega postavi neki predmet, onda će on, pod uslovom da mu se posle svakog učinjenog koraka (koji iznosi 1 m) kaže samo da li se na taj način približio predmetu ili ne, u konačno mnogo koraka naći predmet i broj učinjenih koraka biće sigurno manji od $\frac{3}{2}d+7$ (predmet se smatra pronađenim ako mu se mudrac približi na rastojanje manje od 1 m, tj. kada ga ugleda). Dokazati da će mudrac dobiti opkladu.

**2.** Ako je $p$ neparan prost broj i $a$ ceo broj koji nije deljiv sa $p$, tada je jedan i samo jedan od brojeva

$$A=a^{1+2+\cdots+(p-1)}+1 \quad \text{i} \quad B=a^{1+2+\cdots+(p-1)}-1$$

deljiv sa $p$.

**3.** U zajedničkom delu unutrašnjih oblasti parabola $x^2=p^2+2py$ i $x^2=p^2-2py$ upisati elipsu maksimalne površine.

**4.** Odrediti sva realna rešenja sistema jednačina

$$\begin{aligned} x_1+x_2+\cdots+x_n&=a,\\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2&=a^2,\\ &\vdots\\ x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n&=a^n. \end{aligned}$$

## 2.11. JEDANAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE, MAJA 1970

### *II razred*

**1.** Odrediti tri kompleksna broja modula 1 čiji je i proizvod i zbir jednak 1.

**2.** Dijagonale konveksnog petougla $ABCDE$ obrazuju konveksan petougao $A_1B_1C_1D_1E_1$ i petokraku zvezdu.

1° Odrediti zbir uglova petokrake zvezde uz temena $A$, $B$, $C$, $D$ i $E$.

2° Ako je dati petougao $ABCDE$ pravilan, naći odnos površina toga petougla i petougla $A_1B_1C_1D_1E_1$.

3. Dat je kvadrat $ABCD$. Neka je $P_1$ bilo koja tačka na strani $AB$, $P_2$ presek pravih $DP_1$ i $BC$, $P_3$ presek pravih $AP_2$ i $CD$, $P_4$ presek pravih $BP_3$ i $DA$, $P_5$ presek pravih $CP_4$ i $AB$, tačke $P_6, P_7, \dots, P_{13}$ konstruišu se dalje po istom postupku. Dokazati da je $P_{13} \equiv P_1$.

4. Neka su $a, a_1, \dots, a_m$ celi i $n$ prirodan broj. Dokazati

1° Da je broj $a(a^{2n}-1)$ deljiv sa 6;

2° Da je zbir $S=a_1+\cdots+a_m$ deljiv sa 6 ako i samo ako je zbir $S'=a_1^{2n+1}+\cdots+a_m^{2n+1}$ deljiv sa 6.

## *III razred*

1. Data je elipsa $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ i prava $p$ paralelna osi $Oy$ koja seče datu elipsu u tačkama $M$ i $N$. Odrediti geometrijsko mesto presečne tačke $P$ pravih $AM$ i $BN$ i presečne tačke $Q$ pravih $AN$ i $BM$, gde su $A(-a, 0)$ i $B(a, 0)$ temena elipse, kada se prava $p$ kreće ostajući paralelna osi $Oy$.

2. Ako su $a, b, c$ strane trougla i $\alpha, \beta, \gamma$ njegovi uglovi, dokazati jednakost

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cos\alpha+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cos\beta+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cos\gamma=3.$$

3. U koordinatnoj ravni $Oxy$ nacrtana je celobrojna koordinatna mreža. Odsečak prave $(p)$ definisan je u toj ravni pomoću

$$(p) \qquad 7x-3y-5=0 \quad (0 \leq x \leq 100).$$

Odrediti broj kvadrata te mreže unutar kojih ima tačaka odsečka $(p)$.

4. Naći geometrijsko mesto sredina date dužine $c$ čiji se krajevi kreću po mimoilaznim dijagonalama donje i gornje osnove date kocke ivice $a\,(a<c<a\sqrt{2})$.

## *IV razred*

1. Odrediti, bez upotrebe logaritamskih tablica koji je od brojeva $\log_3 4$ i $\log_4 5$ veći.

2. Članove aritmetičkog niza

$$1,\ 1+2n,\ 1+4n,\ \dots \quad (n \in \mathrm{N})$$

grupišimo na sledeći način:

U prvu grupu stavimo prvi član;

U drugu grupu stavimo sledećih $1+n$ članova;

U treću grupu stavimo sledećih $1+2n$ članova; itd.

Dokazati da je zbir svih članova u svakoj grupi jednak trećem stepenu broja članova te grupe.

3. Osnova piramide je kvadrat. Nagibni uglovi bočnih strana piramide prema osnovi odnose se redom kao $1:2:4:2$. Odrediti te uglove.

4. Ako je $p$ prost broj, tada je broj $\dfrac{(2p)!}{(p!)^2}-2$ deljiv sa $p^2$. Dokazati ovo tvrđenje.

## 2.12. DVANAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE, MAJA 1971

### *II razred*

**1.** Neka su $AD$, $BE$, $CF$ težišne linije i $T$ težište trougla $ABC$. Ako su $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$, $\rho_4$, $\rho_5$, $\rho_6$ i $r_1$, $r_2$, $r_3$, $r_4$, $r_5$, $r_6$ redom poluprečnici upisanih i opisanih krugova trouglova $BDT$, $DCT$, $CET$, $EAT$, $AFT$, $FBT$, tada važe jednakosti:

$$r_1 r_3 r_5 = r_2 r_4 r_6,$$

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_3}+\frac{1}{\rho_5}=\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_4}+\frac{1}{\rho_6}.$$

Dokazati.

**2.** Nad stranicama paralelograma $A_1A_2A_3A_4$ sa spoljne strane konstruisani su kvadrati $A_1B_1C_1A_2$, $A_2B_2C_2A_3$, $A_3B_3C_3A_4$, $A_4B_4C_4A_1$. Dokazati da središta $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$ tih kvadrata čine opet kvadrat čija je površina jednaka zbiru površina četvrtina tih kvadrata uvećanom za površinu datog paralelograma.

**3.** Odrediti prirodne brojeve $p$ i $q$ tako da nule trinoma $x^2-px+q$ i $x^2-qx+p$ budu takođe prirodni brojevi.

**4.** Skretnice $A$ i $B$ i okretnica $C$ spojene su železničkim prugama $AC$, $BC$, $AB$ (videti sl. na str. 162) sa dovoljno dugačkim produžecima $AD$ i $BE$. Na $AC$ se nalazi vagon $V_1$, na $BC$ vagon $V_2$ a na $AB$ lokomotiva $L$. Na okretnicu može doći svaki od vagona ali ne i lokomotiva. Služeći se okretnicom i skretnicama pomoću lokomotive prebaciti $V_1$ na mesto $V_2$, $V_2$ na mesto $V_1$ tako da na kraju lokomotiva dođe na svoje prvobitno mesto.

### *III razred*

**1.** Neka su $a$, $b$, $p$, $q$, $r$, $s$ prirodni brojevi takvi da je $qr-ps=1$, $\frac{p}{q}<\frac{a}{b}<\frac{r}{s}$. Dokazati nejednakost $b \geqq q+s$.

**2.** Dat je trougao $ABC$ i realan broj $k$. Neka su $P$, $Q$ i $R$ tačke određene jednakostima $k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}$, $k\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BQ}$, $k\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CR}$. Dokazati jednakost

$$AB^2+BC^2+CA^2=q\,(PQ^2+QR^2+RP^2),$$

gde je $q$ funkcija od $k$. Odrediti i ispitati $q(k)$.

**3.** Na stranicama paralelograma $A_1A_2A_3A_4$ konstruisani su sa unutrašnje strane kvadrati $A_1B_1C_1A_2$, $A_2B_2C_2A_3$, $A_3B_3C_3A_4$, $A_4B_4C_4A_1$. Dokazati da središta $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$ tih kvadrata obrazuju opet kvadrat čija je površina jednaka zbiru površina četvrtina tih kvadrata umanjenom za površinu datog paralelograma.

**4.** Skala termometra koji visi na zidu vertikalno ima dužinu $2r$ a sredina joj je na visini $h\,(h>r)$ iznad horizontalne ravni koja prolazi kroz oko posmatrača. Na kojoj udaljenosti od zida posmatrač najbolje vidi skalu, tj. vidni ugao je najveći?

*IV razred*

1. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi veći od 1 i $m \in \mathrm{N}$. Dokazati

$$\sum_{i=1}^{+\infty} (\log_{a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n} a_i)^{-m} \geq n (n-1)^m.$$

Kada važi znak jednakosti?

2. Koliko rešenja ima jednačina $\frac{x}{\sin x} = \frac{n\pi}{2}$ $(n \in \mathrm{N})$.

3. Dato je $n$ tačaka u ravni $A_1, A_2, \ldots, A_n$, od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Neka je $p_{ij}$ prava određena tačkama $A_i$ i $A_j$. Koliki je maksimalan broj presečnih tačaka pravih $p_{ij}$ i $p_{kl}$ pri čemu su $i, j, k, l$ različiti elementi skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

4. Date su funkcije $f_n(x) = \frac{1 - \cos x \cos 2x \cdots \cos nx}{x^2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

1° Dokazati da postoji $\lim_{x \to 0} f_n(x) = f_n$ za svako $n \in \mathrm{N}$.

2° Odrediti vezu između $f_n$ i $f_{n-1}$.

3° Izračunati $f_n$.

## 2.13. TRINAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE, MAJA 1972

*II razred*

1. Ako su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ realni brojevi takvi da je $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \neq 0$, $\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0$, $\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2 > 0$, dokazati da je $\beta_1 \beta_3 - \beta_2^2 < 0$.

2. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = a \quad (a \text{ realan parametar}).$$

3. a) Neka su $A, K, L, M, N$ tačke na jednom orijentisanom krugu. Dokazati da su tetive $KM$, $LN$ normalne ako i samo ako je $\widehat{AK} + \widehat{AM} = \widehat{AL} + \widehat{AN} + \pi$.

b) Neka su $A, B, C, D$ bilo koje četiri tačke na jednom krugu i $K, L, M, N$ sredine lukova $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$. Dokazati da su tetive $KM$ i $LN$ normalne među sobom.

4. a) Ako je $S$ središte upisanog kruga u trouglu $ABC$ i $D$ presek prave $AS$ i kruga $ABC$, tada je $DB = DC = DS$. Dokazati.

b) Neka je $ABCD$ tetivni četvorougao. Dokazati da centri $A', B', C', D'$ upisanih krugova u trougle $BCD$, $CDA$, $DAB$, $ABC$ obrazuju pravougaonik.

*III razred*

1. Rešiti jednačinu

$$(a-1)\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x}\right) = 2 \quad (a \text{ realan parametar}).$$

2. Kružni luk $AB$ sa središtem $O$ ima centralni ugao $\alpha$, a tačke $C$ i $D$ dele tetivu $AB$ na tri jednaka dela.

a) Ako je $\measuredangle COD = x$, dokazati da je $\cos x = \frac{4+5\cos\alpha}{5+4\cos\alpha}$.

b) Izračunati razliku $\cos x - \cos\frac{\alpha}{3}$.

c) Koliki mora biti ugao $\alpha$ da bi ta razlika bila jednaka 0?

3. Prave koje spajaju temena paralelograma sa sredinama nesusednih strana obrazuju jedan osmougao. Dokazati da je površina tog osmougla jednaka šestini površine datog paralelograma.

4. Odrediti zapreminu trostrane piramide čije strane imaju površine $S_0$, $S_1$, $S_2$, $S_3$ a diedri uz stranu sa površinom $S_0$ su jednaki.

### *IV razred*

1. Dokazati da je za svaki prirodan broj $n$ izraz $n+3n^3+7n^7+9n^9$ deljiv sa 10.

2. Koliki je maksimalni broj permutacija od $n$ elemenata takvih da su svaka dva elementa susedna u najviše jednoj od permutacija.

3. Nad duži $AB (AB=2r)$ kao nad prečnikom konstruisan je polukrug $k$. Neka je $O$ centar tog polukruga. Oko tačaka $A$ i $B$ opisani su krugovi $a$ i $b$ poluprečnika $r$ koji seku polukrug $k$ u tačkama $C$ i $D$. U oblast određenu lukovima $OC$, $OD$, $CD$ upisan je niz krugova $k_1, k_2, \ldots$ sa poluprečnicima $r_1, r_2, \ldots$ od kojih svaki dodiruje lukove $OC$ i $OD$, krug $k_1$ dodiruje luk $CD$ a svaki sledeći krug niza dodiruje prethodni krug iz tog niza. Dokazati da za svaki prirodni broj $m$ važi $r_m = \frac{r}{2m(m+1)}$.

4. Unutar koncentričnih krugova $a$ i $b$ sa centrom u $O$ data je tačka $P$ različita od $O$. Bilo koja tačka poluprave koja polazi iz tačke $P$ seče te krugove u tačkama $A$ i $B$. Dokazati da je duž $AB$ najveća ako je prava $PAB$ normalna na pravoj $OP$.

## 2.14. ČETRNAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE, MAJA 1973

### *I razred*

1. U nekom društvu matematičara svaki od njih se bavi bar jednom od sledećih oblasti matematike: algebrom, analizom, geometrijom ili logikom. Onaj koji se bavi algebrom ili logikom bavi se i analizom; onaj koji se bavi geometrijom bavi se i logikom; onaj koji se bav analizom i geometrijom bavi se i algebrom. Kojom od ovih grana se bavi najviše a kojom najmanje matematičara? Obrazložiti odgovor.

2. Dat je krug $k$ i njegov prečnik $AB$. Na jednom polukrugu $AB$ izabrano je $n$ tačaka $P_1, P_2, \ldots, P_n$ takvih da je $P_1$ između $A$ i $P_2$, $P_2$ između $P_1$ i $P_3, \ldots,$ i $P_n$ između $P_{n-1}$ i $B$. Odrediti tačku $C$ na drugom polukrugu tako da zbir površina trouglova $CP_1P_2$, $CP_2P_3$, $\ldots$, $CP_{n-1}P_n$ bude najveći.

3. Izračunati

$$\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n}+\underbrace{11\ldots1}_{n+1}-\underbrace{66\ldots6}_{n}}.$$

4. Dijagonale $AC$ i $BD$ jednakokrakog trapeza $ABCD$ sa osnovicom $AB$, seku se u tački $O$ pod uglom $AOB=60^0$. Dokazati da sredine duži $OA$, $OD$ i $BC$ čine jednakostraničan trougao.

5. a) Rešiti sistem jednačina

$$|x|+|y-1|=1, \qquad x+2y=3.$$

b) Prikazati grafički rešenje u ravni pravouglog koordinatnog sistema $xOy$.

### *II razred*

1. U skupu realnih brojeva rešiti po $x$ jednačinu

$$\sqrt{2x-a}=x-b,$$

gde su $a$ i $b$ realni brojevi.

2. Ako je zbir udaljenosti između sredina parova suprotnih stranica četvorougla jednak njegovom poluobimu, tada je taj četvorougao paralelogram. Dokazati.

3. Dat je jednakostraničan trougao $ABC$ stranice $a$ i centra $O$ i tačka $P$ koja pripada odsečku $OC$. Konstruisati jednakostranični trougao $XYZ$ upisan u $ABC$ tako da tačke $X, Y, Z$ leže redom na stranicama $BC, CA, AB$ i da stranica $XY$ prolazi kroz tačku $P$. Kada zadatak ima rešenje?

4. Dokazati nejednakost

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{120}{121}>\frac{1}{11}.$$

### *III razred*

1. Unutar tetraedra $ABCD$ uzeta je proizvoljna tačka $O$. Dokazati da je zbir uglova pod kojima se iz $O$ vide pojedine ivice tog tetraedra veći od $3\pi$.

2. U pravougaoniku $ABCD$ uzeta je proizvoljna tačka $O$. Dokazati da važi

$$\frac{P_{OAC}}{P_{OBD}}=\frac{\operatorname{tg}\measuredangle AOC}{\operatorname{tg}\measuredangle BOD}.$$

3. Rešiti sistem jednačina

$$x:y:z=(y-z):(z-x):(x-y),$$

gde su $x, y, z$ različiti realni brojevi.

4. Neka je $S(a)$ zbir cifara prirodnog broja $a$ prikazanog u dekadnom sistemu i $m$ dati prirodan broj. Dokazati da je razlika

$$S(a^m)-S(a)^m$$

deljiva sa 9 za bilo koji prirodan broj $a$.

*IV razred*

1. Dat je rastući niz prirodnih brojeva

(1) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

za koji važi

(2) $$1+\sum_{i=1}^{n-1} a_i \geqq a_n \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Dokazati da se svaki prirodan broj $N$ može prikazati kao suma nekoliko različitih članova niza (1). Dokazati da je taj prikaz jednoznačan samo u slučaju kada u nejednakostima (2) važi znak jednakosti za svako $n$. Odrediti u tom slučaju niz (1).

2. U prostoru je dato 5 tačaka od kojih nikoje 4 ne leže u istoj ravni. Dokazati da se od tih 5 tačaka uvek mogu izabrati 2 tačke tako da duž koja ih spaja prodire ravni kroz ostale tri tačke, u tački koja leži u trouglu koji određuju te tri tačke.

3. Brojevi $x, y, z, t$ čine izvesnu permutaciju brojeva 12, 14, 37, 65. Odrediti te brojeve ako se zna da je

$$xy-xz+yt=182.$$

4. Odrediti geometrijsko mesto kompleksnih brojeva $z=\frac{c-i}{2c-i}$ ako se realan broj $c$ menja.

## 2.15. PETNAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE, APRILA 1974

*I razred*

1. U pravouglom koordinatnom sistemu prikazati skup tačaka čije koordinate zadovoljavaju nejednakost:

$$\left||x|-1\right|+\left||y|-1\right|\leqq 1.$$

2. U ravni su date tri prave $p$, $q$ i $r$, koje se dve po dve seku u tri različite tačke. Konstruisati pravu normalnu na pravoj $r$ koja seče prave $p$ i $q$ u tačkama jednako udaljenim od prave $r$.

3. Odrediti šestocifren broj koji ima osobinu da se cikličnim permutovanjem njihovih cifara dobijaju brojevi redom jednaki tom broju pomnoženom sa 2, 3, 4, 5, 6.

4. Na krugu su poređana 1974 deteta. Oni igraju sledeću igru: prvo dete ostaje na krugu, drugo dete ispada, treće ostaje na krugu, četvrto ispada, itd. sve dotle dok na krugu ne ostane samo jedno dete. Koje će dete ostati poslednje na krugu?

## *II razred*

**1.** Dokazati da je $x_1 = x_3 = \cdots = x_{99} = m$, i $x_2 = x_4 = \cdots = x_{100} = n$ jedino pozitivno rešenje sistema jednačina

$$nx_1 = x_2 x_3 = x_4 x_5 = \cdots = x_{98} x_{99} = x_{100} m,$$

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = \cdots = x_{99} + x_{100} = m + n,$$

gde su $m$ i $n$ pozitivni brojevi.

**2.** Odrediti celobrojna rešenja jednačine

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 y^2.$$

**3.** Temena konveksnog šestougaonika $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ su krajevi prečnika $A_1A_4$, $A_2A_5$, i $A_3A_6$ kruga $k$. Tačka $P$, koja je različita od temena šestougaonika, leži na krugu $k$. Ortogonalne projekcije tačke $P$ na prave $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_4$, $A_4A_5$, $A_5A_6$ i $A_6A_1$ su tačke $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$, $Q_5$, $Q_6$.

a) Dokazati da su bilo koje dve susedne strane šestougaonika $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ uzajamno normalne.

b) Dokazati da sredine $R_1$, $R_2$, $R_3$ duži $Q_1Q_4$, $Q_2Q_5$, $Q_3Q_6$, tačka $P$ i centar $O$ kruga $k$ pripadaju nekom krugu.

**4.** Data su dva uzajamno normalna prečnika $AB$ i $CD$ kruga sa centrom u $O$ i poluprečnikom $r$. Na duži $OA$ izaberimo tačku $M$ tako da je $OM = r/\sqrt{3}$. Proizvoljna prava kroz tačku $M$ seče pravu $CO$ u tački $R$, krug u tačkama $P$ i $Q$, tako da su tačke $P$ i $R$ sa iste strane tačke $M$. Dokazati jednakost

$$\frac{1}{MQ} = \frac{1}{MP} + \frac{1}{MR}.$$

## *III razred*

**1.** Rešiti jednačinu

$$\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{x + 3}.$$

**2.** Izračunati ugao $\alpha$ ako je

$$\operatorname{ctg} \alpha = 2 + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c},$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = 2 + \sqrt{a},$$

gde su $a$, $b$, $c$ prirodni brojevi koji nisu deljivi sa 4, a $\sqrt{a}$, $\sqrt{bc}$ su iracionalni brojevi.

**3.** Dan je uspravni kružni stožac (kupa) s vrhom $V$, središtem osnovke $S$ i kutom pri vrhu osnog presjeka jednakim $\beta$. Dvije tangencijalne ravnine stošca tvore kut $\alpha$ i diraju stožac po izvodnicama $VA$ i $VB$ gdje su točke $A$ i $B$ na opsegu osnovke. Izračunati kut $ASB$.

**4.** Naći maksimalni produkt prirodnih brojeva čiji je zbroj jednak danom prirodnom broju $n$.

### *IV razred*

1. Naći čisto periodični razlomak, koji je veći od $\frac{1}{4}$ i manji od $\frac{1}{3}$, a zbir cifara periode mu je za 12 veći od kvadrata broja tih cifara.

2. Naći sve prirodne brojeve $n$, takve da neka tri uzastopna koeficijenta razvoja $(a+b)^n$ obrazuju aritmetičku progresiju.

3. Odrediti tangentu elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ čiji je odsečak između osa elipse najmanji.

4. Na šahovskoj tabli formata $8\times 8$ nalazi se na prvom i osmom redu 8 belih i 8 crnih žetona respektivno. Beli počinje igru. Igrači naizmenično pomeraju po jedan žeton za jedno ili više polja po svom stupcu u bilo kojem smeru, ali najdalje do ruba table ili protivničkog žetona. Igru gubi onaj koji prvi dođe u situaciju da ne može povući potez. Dokazati da crni može da pobedi ma kako beli igrao.

## 2.16. ŠESNAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE, APRILA 1975

### *I razred*

1. Dokazati da za svako $a$, za koje je $5\leq a\leq 10$, važi jednakost

$$\sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}}+\sqrt{a+8-6\sqrt{a-1}}=1.$$

2. U unutrašnjosti ili na nekoj stranici jednakostraničnog trougla $ABC$ izabrana je tačka $S$ kroz koju su konstruisane prave $SA_1$, $SB_1$, $SC_1$, redom paralelne stranicama $AC$, $AB$, $BC$ tog trougla, tako da $A_1$, $B_1$ i $C_1$ pripadaju redom stranicama $BC$, $AC$ i $AB$.

Dokazati da zbir $SA_1+SB_1+SC_1$ ima konstantnu vrednost nezavisno od izbora tačke $S$.

3. Dva automobila polaze istovremeno iz mesta $A$ prema mestu $B$. Prvi ide polovinu vremena brzinom $u$, a drugu polovinu vremena brzinom $v$; drugi ide polovinu puta brzinom $u$, a drugu polovinu brzinom $v$. Koji će automobil prvi stići na cilj?

4. Na krugu su napisane u proizvoljnom poretku četiri jedinice i pet nula. Zatim se između jednakih cifara napiše nula, a između različitih jedinica, pa se prvobitne cifre obrišu.

Dokazati da ma koliko se puta ponovio ovaj postupak ne mogu se dobiti devet nula.

### *II razred*

1. Dokazati da jednačina $ax^2+bx+c=0$ nema racionalnih rešenja ako su $a$, $b$ i $c$ celi neparni brojevi.

**2.** U ravni su date četiri prave od kojih nikoje dve nisu paralelne i nikoje tri ne prolaze kroz istu tačku. Ako je četvrta prava paralelna sa nekom težišnom linijom trougla kojeg obrazuju prve tri prave, tada je svaka od prve tri prave paralelna sa nekom od težišnih linija trougla kojeg obrazuju ostale tri prave. Dokazati ovo.

**3.** Slovoslagač je prosuo cifre 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9 nekog broja koji je šesti stepen nekog prirodnog broja. Koji je taj broj?

**4.** U unutrašnjosti kvadrata dato je $n$ tačaka. Spajaćemo po dve tačke među sobom kao i pojedine tačke sa temenima kvadrata, ali tako da se nikoje dve duži ne seku dokle god je to mogućno. Koliko se najviše odsečaka na taj način može konstruisati?

### *III razred*

**1.** Ako se spoje sredine stranica konveksnog $n$-tougla $M$, dobijeni poligon ima površinu ne manju od polovine površine poligona $M$ ($n \geqq 4$). Dokazati ovo.

**2.** Neka je $S$ proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla $ABC$ čije su stranice $a$, $b$ i $c$. Dokazati nejednakost

$$SA\cos\frac{A}{2}+SB\cos\frac{B}{2}+SC\cos\frac{C}{2}\geqq\frac{a+b+c}{2}.$$

U kom slučaju važi jednakost?

**3.** Rešiti jednačinu

$$(\sqrt{x^2-5x+8}+\sqrt{x^2-5x+6})^{x/2}+(\sqrt{x^2-5x+8}-\sqrt{x^2-5x+6})^{x/2}=2^{(x+4)/4}.$$

**4.** Koji se najveći broj topova može postaviti na šahovsku tablu $3n\times 3n$ tako da svaka od tih figura bude pod udarom ne više od jedne od ostalih?

### *IV razred*

**1.** Data je parabola $y=x^2$ i tačka $A(x_0, x_0^2)$, gde je $x_0>\sqrt{2}$, na njoj. Neka su $B$ i $C$ dve tačke date parabole, različite od $A$, koje imaju osobinu da normale date parabole u tim tačkama prolaze kroz tačku $A$. Dokazati da prava $BC$ seče osu parabole u fiksnoj tački za svako $x_0$.

**2.** Rešiti jednačinu $1!+2!+\cdots+x!=y^z$, gde su $x$, $y$ i $z$ prirodni brojevi i $z>1$.

**3.** Dati su realni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koji zadovoljavaju relacije

$$|a_i|\leqq M \quad (i=1, 2, \ldots, n); \quad a_1+a_2+\cdots+a_n=0.$$

Dokazati da je

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n\leqq\frac{n^2}{4}M.$$

**4.** U nekom društvu svaka dva poznanika nemaju zajedničkih poznanika, a svaka dva čoveka koji se ne poznaju imaju tačno dva zajednička poznanika. Dokazati da u tom društvu svi imaju jednak broj poznanika.

## 2.17. SEDAMNAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE, APRILA 1976

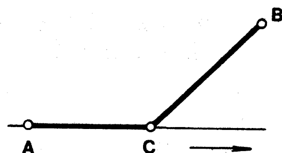
### *I razred*

**1.** Dato je $N$ objekata od kojih $N_a$ ima svojstvo $a$, $N_b$ svojstvo $b$, $N_c$ svojstvo $c$, $N_{a,b}$ svojstva $a$ i $b$, $N_{a,c}$ svojstva $a$ i $c$ i $N_{b,c}$ svojstva $b$ i $c$. Dokazati da je

$$3N+N_{a,b}+N_{a,c}+N_{b,c}\geqq 2(N_a+N_b+N_c).$$

**2.** Dokazati da se u krug poluprečnika 9 ne može smestiti 400 tačaka tako da rastojanje između svake dve tačke bude veće od 1.

**3.** Dokazati da za tri pozitivna broja čiji je proizvod jednak 1, a njihova suma strogo veća od sume njihovih recipročnih vrednosti, vredi: postoji tačno jedan među njima veći od 1.




**4.** Na obali reke nalazi se mesto $A$, a nizvodno od njega, dalje od obale, nalazi se mesto $B$. Odrediti na kom mestu treba izgraditi pristanište $C$ da bi transport iz $A$ u $B$, preko $C$, bio najjeftiniji ako se zna da je cena transporta rekom dva puta manja nego kopnom. Pretpostavlja se da su tok reke i put iz $C$ u $B$ pravolinijski (videti sliku).

### *II razred*

**1.** Izračunati zbir $\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$.

**2.** Dat je pravilni šestougaonik čija stranica ima dužinu $a$. Služeći se samo lenjirom konstruisati duži $\dfrac{a}{n}$ za $n=2, 3, 4, \ldots$

**3.** Dat je trougao $ABC$ sa stranicama $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$. Odrediti tačku $P$ unutar tog trougla tako da vrednost izraza $ax^2+by^2+cz^2$ bude minimalna, pri čemu su $x, y, z$ rastojanja tačke $P$ od pravih $BC$, $CA$, $AB$.

**4.** Odrediti najveći broj deljiv sa 11 čije su sve cifre različite.

### *III razred*

**1.** Dokazati nejednakost

$$\frac{\log_b a^2}{a+b}+\frac{\log_c b^2}{b+c}+\frac{\log_a c^2}{c+a}\geqq\frac{9}{a+b+c},$$

ako je $a>1$, $b>1$, $c>1$ ili $0<a<1$, $0<b<1$, $0<c<1$.

**2.** Ako su $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ uglovi netupouglog trougla, dokazati da je

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma.$$

**3.** Odrediti maksimalnu vrednost odnosa zapremina lopte i oko nje opisane kružne kupe.

**4.** Dat je skup $S$ od $n$ $(n\geqq 2)$ tačaka u ravni sa svojstvom: ako je $A, B\in S$, tada postoji tačka $C\in S$ tako da je trougao $ABC$ jednakostraničan. Koliki može biti broj $n$?

### *IV razred*

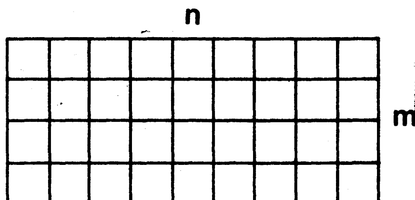
1. Neka je $S$ skup tačaka u ravni sa celobrojnim koordinatama u izabranom pravouglom koordinatnom sistemu. Dokazati da za svaki prirodan broj $n$ postoji krug sa centrom u tački $(\sqrt{2}, 1/3)$ koji sadrži tačno $n$ tačaka skupa $S$.

2. Zatvorene konveksne ravne krive $C_1'$ i $C_2'$ imaju obime $x_1$ i $x_2$, gde je $x_1+x_2=d=\text{const}$, i slične su krivama $C_1$ i $C_2$ koje imaju obime $o_1$ i $o_2$ i površine $p_1$ i $p_2$. Odrediti $x_1$ i $x_2$ tako da je zbir površina krivih $C_1'$ i $C_2'$ minimalan.

3. Dati su skupovi celih brojeva $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ sa svojstvom: postoje elementi $x\in A$ i $y\in B$ tako da je $x\equiv y \pmod{2n}$.

Dokazati da postoje neprazni podskupovi $A'\subset A$ i $B'\subset B$ takvi da je suma elemenata iz $A'$ i elemenata iz $B'$ deljiva sa $2n$.

4. Grad ima kvadratnu mrežu sa $m$ „horizontalnih" i $n$ „vertikalnih" ulica (vidi sliku). Kolika je najmanja dužina dela mreže koji treba asfaltirati tako da se od svake raskrsnice do bilo koje druge može stići asfaltom?




## 2.18. OSAMNAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE, APRILA 1977

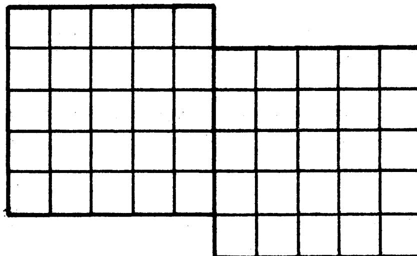
### *I razred*

1. Odrediti celobrojna rešenja jednačine $p(x+y)=xy$, gde je $p$ prost broj.

2. Neka su $a$, $b$, $c$ prirodni brojevi takvi da je $a^2+b^2=c^2$. Dokazati da je $abc$ deljivo sa 60.

3. Na stranicama kvadrata $ABCD$ središta $O$ nalaze se tačke $P$, $Q$ i $R$ koje dele njegov obim na tri jednaka dela. Dokazati da je zbir dužina duži $PO$, $QO$, $RO$ najmanji mogućan ako je jedna od tačaka $P$, $Q$ ili $R$ sredina stranice kvadrata na kojoj se nalazi.

4. Da li se dve ploče dimenzija $5\times 5$, prislonjene jedna uz drugu kao na slici, mogu pokriti dominama dimenzija $2\times 1$ (jedna domina pokriva dva susedna polja)?



### *II razred*

1. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu

$$x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}.$$

2. Na stranicama $AB$, $BC$ i $CA$ trougla $ABC$ date su tačke $P$, $Q$ i $R$ takve da je $AP=\lambda AB$, $BQ=\lambda BC$, $CR=\lambda CA$ $\left(\frac{1}{2}\leq\lambda<1\right)$. Dokazati da obim trougla $PQR$ nije veći od obima trougla $ABC$ pomnoženog brojem $\lambda$.

**3.** Dato je dvadeset prirodnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ takvih da je

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{20} < 70.$$

Dokazati da među razlikama $a_i - a_j$ $(i > j)$ postoje bar četiri međusobno jednake.

**4.** Dokazati da za svaki prirodan broj $n > 1$ važe nejednakosti

$$\sqrt{n} < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n-2} < \sqrt{2n}.$$

## *III razred*

**1.** Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ $(k \in \mathrm{N})$ pozitivni brojevi manji od 1. Dokazati da važi nejednakost

$$\sqrt{a_1^2 + (1-a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1-a_3)^2} + \cdots + \sqrt{a_{2k-1}^2 + (1-a_{2k})^2} + \sqrt{a_{2k}^2 + (1-a_1)^2} \geqq k\sqrt{2}.$$

**2.** Odrediti sve prirodne brojeve čiji je kvadrat jednak petom stepenu zbira njegovih cifara (u dekadnom zapisu).

**3.** Kružnica upisana u pravougli trougao sa hipotenuzom dužine $c$ dodiruje stranice oštrog ugla u tačkama $M$ i $N$. Dokazati da je

$$\overline{MN} \leqq \frac{2}{9} c\sqrt{3}.$$

**4.** Neka je $D$ skup svih dijagonala pravilnog 100-ugaonika. Da li postoji podskup $E$ skupa $D$ koji ima sledeća tri svojstva:

1° Dijagonale iz skupa $E$ nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka.
2° Iz svakog temena 100-ugaonika polazi paran broj dijagonala iz skupa $E$.
3° Dijagonale iz $E$ dele 100-ugaonik na trouglove?

## *IV razred*

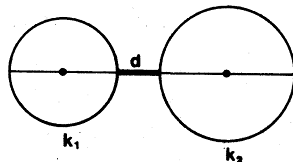
**1.** Ako je $a_i = n! + i$, tada za svako $n \geqq 2$ i svako $k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ postoji bar jedan prost broj $p$ takav da $p$ deli $a_k$ i za svako $j \neq k$ $(1 \leqq j \leqq n)$ $p$ ne deli $a_j$. Dokazati ovo.

**2.** Dokazati da površina kvadrata koji se u celosti nalazi unutar datog trougla nije veća od polovine površine trougla.

**3.** Na koliko se načina broj $6k$ $(k \in \mathrm{N})$ može napisati kao zbir tri prirodna broja? (Načini koji se razlikuju samo u redosledu sabiraka smatraju se istim.)

**4.** U ravni je dat skup $S$ od 100 tačaka. Dokazati da postoji konačno mnogo krugova za koje važi:

1° Svaka tačka iz $S$ je sadržana u unutrašnjosti nekog kruga;
2° Krugovi su disjunktni i udaljenost između svaka dva kruga je strogo veća od 1;
3° Zbir dijametara tih krugova je strogo manji od 100. (Udaljenost $d$ između dva disjunktna kruga $k_1$ i $k_2$ definiše se kao na slici.)



## 2.19. DEVETNAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE, APRILA 1978

### *I razred*

1. Odrediti vrednost izraza

$$S = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx},$$

gde su $x$, $y$, $z$ realni brojevi za koje važi $xyz = 1$.

2. Odrediti sve prirodne brojeve koji su 33 puta veći od zbira svojih cifara.

3. Neka su $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ paralelne tetive nekog kruga. Tačke $A'$, $B'$, $C'$ su simetrične sa tačkama $A_1$, $B_1$, $C_1$ u odnosu na sredine duži $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, respektivno. Dokazati da su tačke $A'$, $B'$, $C'$ kolinearne.

4. Tablica $9 \times 10$ je pokrivena dominama $2 \times 1$. Dokazati da se tablica ne može pokriti tim dominama tako da svaka domina koja je bila u horizontalnom položaju bude u vertikalnom i svaka koja je bila u vertikalnom položaju bude u horizontalnom.

### *II razred*

1. Da li postoje realni brojevi $a$, $b$, $c$, $d$ takvi da:

1° jednačina $ax^2 + bdx + c = 0$ ima različita realna rešenja $x_1$ i $x_2$,
2° jednačina $bx^2 + cdx + a = 0$ ima različita realna rešenja $x_2$ i $x_3$,
3° jednačina $cx^2 + adx + b = 0$ ima različita realna rešenja $x_3$ i $x_1$?

2. Neka je $S$ podskup skupa realnih brojeva koji zadovoljava sledeće uslove:

a) $\mathbf{Z} \subset S$; b) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in S$; c) $x, y \in S$, $x + y \in S$, $xy \in S$.

Dokazati da

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \in S.$$

3. Dat je četvorougao $ABCD$. Neka je $E$ tačka na pravoj $DB$ takva da je $AE \| DC$, a $F$ tačka na pravoj $AC$ takva da je $DF \| AB$. Dokazati da je $EF \| BC$.

4. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tačke jedne ravni takve da je najveće od rastojanja $\overline{A_iA_k}$ $(i \neq k)$ jednako 1, a najmanje $d$. Dokazati da je $d < \dfrac{2}{\sqrt{n} - 1}$.

### *III razred*

1. Odrediti sve prirodne brojeve $n$ za koje postoji polinom $P_n(x)$ $n$-tog stepena sa celobrojnim koeficijentima, takav da je u $n$ različitih celobrojnih tačaka jednak $n$, a u nuli jednak nuli.

2. Dokazati da je ceo broj $r > 2$ složen ako i samo ako je tačno bar jedno od sledeća dva tvrđenja:

a) za neko $s = 2, 3, \ldots$ je $r = 2^s$,

b) za neke $u$, $v = 3, 4, \ldots$ $(u \leq v)$ je $r = \dfrac{u}{2}(2v - u + 1)$.

3. Neka je $T$ težište i $O$ proizvoljna tačka u trouglu $ABC$. Ako su $A_1$, $B_1$, $C_1$ tačke preseka prave $OT$ sa pravama $BC$, $CA$, $AB$ respektivno, dokazati da je

$$OA_1 \cdot OB_1 \cdot OC_1 \leqq TA_1 \cdot TB_1 \cdot TC_1.$$

4. U ravni je dato $n$ tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ako je $\overline{A_iA_j} \geqq 1$ za svako $i, j = 1, 2, \ldots, n$ $(i \neq j)$, tada broj duži $\overline{A_iA_j}$ dužine jednake 1 ne prelazi $3n$. Dokazati.

*IV razred*

1. Neka je $n$ prirodan broj. Označimo sa $p_k$ broj nenegativnih celih rešenja jednačine $kx+(k+1)y=n-k+1$. Izračunati

$$\sum_{k=1}^{n+1} p_k.$$

2. Neka je $a+(n-1)d$, $n=1, 2, \ldots$ aritmetički niz sa razlikom $d>0$. Dokazati da je $a/d$ racionalan broj ako i samo ako se iz tog niza može izdvojiti geometrijski podniz.

3. Neka je $P \subset \mathrm{N}$ takav da važe sledeća dva uslova:

1) $a \in P$, $b \in P \Rightarrow a+b \in P$,

2) $(\forall q \in \mathrm{N}, q>1)(\exists c \in P)(c \not\equiv 0 \bmod q)$.

Dokazati da je $\mathrm{N} \setminus P$ konačan skup.

4. Neka je $a \geqq 3$ i neka je $P_n(x)$ polinom $n$-tog stepena sa realnim koeficijentima. Dokazati da je

$$\max_{0 \leqq i \leqq n+1} |a^i - P_n(i)| \geqq 1.$$

## 2.20. DVADESETO SAVEZNO TAKMIČENJE, APRILA 1979

*I razred*

1. Odrediti realne brojeve $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ za koje je $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$ ako su poznate sume $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{10}$ po dva od tih brojeva za koje je $S_1<S_2<S_3<\cdots<S_{10}$.

2. U krug je upisan sedmougao čija su tri ugla jednaka $120°$. Dokazati da su bar dve stranice ovog sedmougla jednake.

3. Da li se u krug radijusa 1 može smestiti izvestan broj krugova, tako da nikoja dva od njih nemaju zajedničku unutrašnju tačku i da im je suma radijusa jednaka 1979?

4. Za koje je prirodne brojeve $n$ suma cifara broja $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ jednaka 9?

### *II razred*

**1.** Neka su tačke $P$ i $M$ na stranicama $DC$ i $BC$ kvadrata $ABCD$, takve da je $PM$ tangenta kruga sa centrom u $A$ i radijusom $AB$. Dalje, neka su $Q$ i $N$ tačke preseka pravih $PA$ i $MA$ sa dijagonalom $BD$. Dokazati da tačke $P$, $Q$, $N$, $M$ i $C$ pripadaju jednoj kružnici.

**2.** Ako je $x > y \geqq 0$, tada je

$$x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geqq 3.$$

Dokazati ovo.

**3.** Naći sve rastave broja 2001 u obliku sume 1979 kvadrata prirodnih brojeva.

**4.** Neka je dat niz od $m+n$ kuglica, gde su $m$ i $n$ uzajamno prosti brojevi. Prvih $m$ kuglica tog niza premestimo u istom poretku iza preostalih $n$, pa postupak ponavljamo sa tako dobijenim nizom. Dokazati da se posle nekoliko koraka prva kuglica može dovesti na bilo koje (unapred određeno) mesto u nizu.

### *III razred*

**1.** Dati su polinomi sa kompleksnim koeficijentima

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

sa nulama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i

$$Q(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n,$$

sa nulama $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$.

Ako su $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots$ i $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots$ realni brojevi, dokazati da je $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$ takođe realan broj.

**2.** Dati su pravilan tetraedar ivice $a$ i pravilna četvorostrana piramida (osnova kvadrat, sve ivice jednake) takođe ivice $a$. Razrezati ova tela i od dobijenih delova sastaviti kocku.

**3.** Neka su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ kompleksni brojevi. Dokazati da se mogu izabrati prirodni brojevi $i_1, i_2, \ldots, i_k$ tako da je $1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq n$ i

$$|z_{i_1} + z_{i_2} + \cdots + z_{i_k}| \geqq \frac{\sqrt{2}}{8}(|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|).$$

**4.** Na crnim poljima prvih šest redova šahovske table nalaze se pešaci. U svakom potezu pešak preskače jednog od pešaka susednih po dijagonali, i time se pomiče za dva polja po dijagonali dolazeći na slobodno polje, a preskočeni pešak se sklanja sa table. Da li se može igrati tako da posle nekog broja poteza na tabli ostane samo jedan pešak?

### *IV razred*

**1.** Dokazati da jednačina $(p-1)! + 1 = p^n$ nema rešenja u prirodnim brojevima $p$ i $n$ ako je $p > 5$.

**2.** Da li postoje brojevi $a, b > 0$, takvi da je

a) $a, b \notin \mathbf{Q}$ i $a^b \in \mathbf{Q}$;

b) $a, b, a^b \notin \mathbf{Q}$;

c) $a \in \mathbf{Q}$ i $b, a^b \notin \mathbf{Q}$?

3. Neka su $A$, $B$, $C$ tri različite tačke kružnice, $P$ površina trougla $ABC$ i $P_1$ površina trougla određenog tangentama u $A$, $B$ i $C$. Naći graničnu vrednost odnosa $P_1/P$ kada je tačka $A$ fiksna a $B$ i $C$ teže ka tački $A$ po luku kružnice, tako da je uvek $B \neq C$.

4. Isti kao 3. zadatak za treći razred.

## 2.21. DVADESET PRVO SAVEZNO TAKMIČENJE, APRILA 1980

### *I razred*

1. Cena olovke je ceo broj para. Ukupna cena 9 olovaka je veća od 11 a manja od 12 dinara, dok je ukupna cena 13 olovaka veća od 15 a manja od 16 dinara. Kolika je cena jedne olovke?

2. Dati su brojevi 1, 12, 123, ..., 123456789, 1234567890, 12345678901, ... Svaki broj dobija se iz prethodnog tako što mu se dopiše sledeća cifra, pri čemu posle 0 dolazi 1, posle 1 dolazi 2, ..., posle 9 dolazi 0, itd. Dokazati da je bar jedan od tih brojeva deljiv sa 1981.

3. Neka je $D$ tačka na stranici $BC$ datog trougla $ABC$, takva da je $2BD = DC$. Naći ostale uglove trougla ako je $\measuredangle ABC = 45°$, $\measuredangle ADC = 60°$.

4. Grad ima 1980 raskrsnica, a u svakoj od njih sastaju se po tri ulice. Postoji kružna autobuska linija koja prolazi kroz svaku raskrsnicu tačno jedanput. Odlučeno je da se u svakoj ulici zasade stabla samo jedne od sledećih vrsta drveća: kesten, breza i lipa. Dokazati da je to moguéno učiniti tako da se u svakoj raskrsnici sastaju tri drvoreda različitih vrsta.

### *II razred*

1. Odrediti sve cele brojeve $x$ za koje je $x^2 + 3x + 24$ potpun kvadrat.

2. U dati romb $ABCD$ upisana je kružnica. Uočimo bilo koju tangentu te kružnice koja stranice $BC$ i $CD$ seče u tačkama $M$ i $N$. Dokazati da je površina trougla $AMN$ uvek ista, tj. ne menja se.

3. Stranica kvadrata $K$ ima dužinu 7. Može li se taj kvadrat pokriti sa 8 kvadrata čije stranice imaju dužinu 3:
   a) uz uslov da su stranice tih kvadrata paralelne stranicama kvadrata $K$,
   b) bez tog uslova?

4. Za prirodne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_{19}$ i $b_1, b_2, \ldots, b_{21}$ važi

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{19} \leq 200,$$

$$1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_{21} \leq 200.$$

Dokazati da postoje četiri od tih brojeva $a_i$, $a_j$, $b_p$, $b_q$, pri čemu je $a_i < a_j$, $b_p < b_q$, tako da važi $a_j - a_i = b_q - b_p$.

### *III razred*

1. U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačinu $x^{5-x}=(6-x)^{1-x}$.

2. Dato je 19 duži čije su dužine $x_1, x_2, \ldots, x_{19}$ takve da važi

$$1 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{19} \leqq 1980.$$

Dokazati da među njima postoje tri duži pomoću kojih se može konstruisati trougao.

3. Neka je $S$ presek dijagonala četvorougla $ABCD$. Ako je

$$\sphericalangle SAB = \sphericalangle SBC = 30°, \quad \sphericalangle SCD = \sphericalangle SDA = 45°,$$

koliki je ugao između dijagonala?

4. Naći sve polinome oblika

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gde je $a_i \in \{1, -1\}$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, tako da svaki od njih ima samo realne nule.

### *IV razred*

1. Data je elipsa $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Dokazati da tačke koje odgovaraju parametrima $t = t_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ leže na jednoj kružnici ako i samo ako je $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = k\pi$ ($k$ ceo broj).

2. Neka je $S$ skup koji se sastoji od $n$ različitih realnih brojeva i $T$ skup zbirova od po $k$ različitih brojeva iz $S$ $(n, k \in \mathrm{N}, n \geqq k)$. Dokazati da skup $T$ sadrži bar $k(n-k)+1$ elemenata.

3. Zadat je prirodan broj $a$. Neka je $a_0 = a$. Ako je

$$a_n = c_0 + 10c_1 + \cdots + 10^k c_k \quad (c_i \in \mathrm{N},\ 0 \leqq c_i \leqq 9,\ i = 0, 1, \ldots, k),$$

i neka je

$$a_{n+1} = 2c_0 + c_1 + 10c_2 + \cdots + 10^{k-1} c_k.$$

Koji se brojevi u nizu $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ pojavljuju beskonačno mnogo puta?

4. Neka je $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$, tako da je $0, 1 \in f([0, 1])$ i tako da za svako $x, y \in [0, 1]$ važi

$$|f(x) - f(y)| \leqq \frac{|x - f(x)| + |y - f(y)|}{2}.$$

Dokazati da postoji tačno jedno $x \in [0, 1]$, takvo da je $f(x) = x$.

## 2.22. DVADESET DRUGO SAVEZNO TAKMIČENJE, APRILA 1981

### *I razred*

1. Prirodni brojevi $a$, $b$ i $c$ su takvi da su $a+c$ i $b+c$ kvadrati uzastopnih prirodnih brojeva. Dokazati da su $ab+c$ i $ab+a+b+c$ takođe kvadrati uzastopnih prirodnih brojeva.

2. Iz jednog temena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla, a iz trećeg težišna linija. Njihove presečne tačke su temena novog trougla. Dokazati da taj trougao ne može biti jednakostraničan.

3. Prva četiri člana jednoga niza su 1, 9, 8, 1. Svaki naredni član niza jednak je poslednjoj cifri zbira prethodna četiri člana.

a) Da li se u nizu pojavljuje četvorka 1, 2, 3, 4?

b) Da li se u nizu nekad ponovi polazna četvorka?

4. Jedan miš gricka parče sira u obliku kocke sa ivicom 3. Kocka sira podeljena je na 27 manjih kockica sa ivicom 1. Miš gricka sir na taj način što počinje sa kockicom u jednom od temena. Pojevši celu kockicu, prelazi na susednu, koja sa tek pojedenom ima zajedničku stranu.

Da li miš može pojesti celo parče sira tako da poslednja kockica koju pojede bude ona u centru kocke?

### *II razred*

1. Neka su $a$, $b$ i $c$ celi brojevi i $a>0$. Pretpostavimo da jednačina $ax^2+bx+c=0$ ima dva različita rešenja u intervalu (0, 1). Dokazati da je $a\geqq 5$ i naći primer takve jednačine za $a=5$.

2. Jedan konveksan četvorougao razbijen je dijagonalama na četiri trougla čije se površine izražavaju celim brojevima. Dokazati da je proizvod ta četiri broja potpun kvadrat.

3. Naći sve parove celih brojeva $(x, y)$ koji zadovoljavaju jednačinu

$$y^4-x(x+1)(x+2)(x+3)=1.$$

4. Brojevi 1, 2, 3, ..., 100 podeljeni su u 7 klasa. Dokazati da u nekoj klasi postoje brojevi $a$, $b$, $c$, $d$ među kojima su bar tri različita i za koje važi $a+b=c+d$.

### *III razred*

1. Dokazati da se za svaki prirodan broj $n$, broj

$$\operatorname{tg}^{2n} 15^\circ+\operatorname{cotg}^{2n} 15^\circ$$

može napisati kao suma kvadrata tri uzastopna prirodna broja.

2. S iste strane duži $PQ$ konstruisana su tri slična trougla $KPQ$, $QLP$ i $PQM$ takva da je $\sphericalangle QPM=\sphericalangle PQL=\alpha$, $\sphericalangle PQM=\sphericalangle QPK=\beta$ i $\sphericalangle PQK=\sphericalangle QPL=\gamma$, pri čemu je $\alpha<\beta<\gamma$. Dokazati da je trougao $KLM$ sličan sa prva tri.

3. Neka $S_1$ označava niz prirodnih brojeva 1, 2, 3, 4, 5, ... Definišimo niz $S_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ pomoću niza $S_n$, povećavajući za jedan one članove niza $S_n$ koji su deljivi sa $n$. (Tako, na primer, $S_2$ je niz 2, 4, 6, ..., $S_3$ je niz 3, 3, 5, 5, 7, 7, ...) Dokazati da je u nizu $S_n$ tačno $n-1$ prvih članova jednako $n$ ako i samo ako je $n$ prost broj.

4. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_{1066}$ podskupovi konačnog skupa $M$ takvi da je $|A_i| > \frac{1}{2}|M|$ za $1 \leq i \leq 1066$. Dokazati da postoje elementi $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$ iz $M$ takvi da svaki $A_i$ sadrži bar jedan od elemenata $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$ (ovde $|S|$ označava broj elemenata skupa $S$).

### *IV razred*

1. Prava deli trougao na dva dela jednakih površina i obima. Dokazati da ona prolazi kroz centar upisanog kruga tog trougla.

2. Neka su $a$ i $b$ pozitivni realni brojevi. Naći minimum izraza $\left|\frac{x+y}{1+x\bar{y}}\right|$, ako su $x$ i $y$ kompleksni brojevi, takvi da je $|x|=a$, $|y|=b$.

3. Neka je $F_n = a^n \sin nA + b^n \sin nB + c^n \sin nC$, gde su $a, b, c, A, B, C$ realni i $A+B+C=k\pi$ ($k$ ceo broj). Dokazati da iz $F_1 = F_2 = 0$ sleduje $F_n = 0$ za sve prirodne brojeve $n$.

4. Skup $S=\{1, 2, \ldots, n\}$ je prvi put razložen na $m$ a drugi put na $m+k$ nepraznih podskupova, $k>0$. Dokazati da se bar $k+1$ element skupa $S$ prvi put nalazio u brojnijem podskupu nego drugi put.

## 2.23. DVADESET TREĆE SAVEZNO TAKMIČENJE, APRILA 1982

### *I razred*

1. Ako za prirodne brojeve $a, b, c, d$ važi $(a+b)^2 + a = (c+d)^2 + c$, dokazati da je $a=c$ i $b=d$.

2. Dato je $n$ sijalica ($n>13$), od kojih svaka ima svoj prekidač. U početnom trenutku neke sijalice su upaljene. Sijalice se pale i gase tako da se svaki put promeni stanje tačno 13 sijalica.

a) Da li je na ovaj način mogućno pogasiti sve sijalice?

b) Koliko je najmanje koraka potrebno da se ugasi 111 sijalica ako su u početku sve upaljene?

3. U ravni je dato šest krugova tako da centar nijednog od njih nije sadržan u uniji preostalih pet krugova. Dokazati da je presek tih krugova prazan.

4. Neka se naspramne stranice $AB$ i $CD$ konveksnog četvorougla $ABCD$ seku u tački $W$. Ako su $X$ i $Y$ redom sredine dijagonala $AC$ i $BD$, dokazati:

a) Rastojanje od tačke $Y$ do prave $AC$ jednako je polurazlici rastojanja od tačaka $B$ i $D$ do te prave;

b) Površina trougla $XYW$ jednaka je četvrtini površine četvorougla $ABCD$.

### *II razred*

1. Odrediti skup $S$ sa najmanjim brojem elemenata tako da važi:

a) $S \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, 1981\}$;

b) $1981 \in S$;

c) Ako $x, y, z \in S$, tada ostatak pri deljenju broja $x+y+z$ sa 1982 takođe pripada skupu $S$.

2. Neka prava $l$ sadrži ortocentar trougla $ABC$. Dokazati da se prave, njoj simetrične u odnosu na stranice trougla, seku na kružnici opisanoj oko trougla $ABC$.

3. Dato je $k$ pozitivnih celih brojeva $a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$, $k > \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Dokazati da postoje $r$ i $s$ takvi da je $a_r + a_1 = a_s$.

4. Odrediti realne brojeve $a$ i $b$ tako da za proizvoljne realne brojeve $u$ i $v$ važi

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |x^2 - ux - v| \geq \max_{0 \leq x \leq 1} |x^2 - ax - b|.$$

## *III i IV razred*

1. Naći sve polinome $P(x)$ sa celim koeficijentima takve da je

$$16\,P(x^2) = (P(2x))^2$$

za sve realne brojeve $x$.

2. Dokazati da je

$$\sqrt[44]{\operatorname{tg} 1° \operatorname{tg} 2° \cdots \operatorname{tg} 44°} < \operatorname{tg} 22°\,30' < \frac{1}{44}(\operatorname{tg} 1° + \operatorname{tg} 2° + \cdots + \operatorname{tg} 44°).$$

3. Neka je $M$ skup svih tačaka u ravni sa celobrojnim koordinatama i $S$ neki njegov podskup. Za tačke $(x-1, y)$, $(x+1, y)$, $(x, y-1)$, $(x, y+1)$ kažemo da su susedne tački $(x, y) \in M$.

Za preslikavanje $f\colon S \to S$ kažemo da je susedno ako ono preslikava $S$ na $S$ uzajamno jednoznačno i ako su tačke $P$ i $f(P)$ susedne za svako $P \in S$.

Ako postoji susedno preslikavanje $f\colon S \to S$, dokazati da postoji i susedno preslikavanje $g\colon S \to S$ koje zadovoljava uslov $g(g(P)) = P$ za svako $P \in S$.

4. Dokazati da postoji tačno jedna četvorka prirodnih brojeva $x, y, z, t$ takva da je $1 < x < y < z < t$ i da je proizvod bilo koja tri od njih uvećan za 1 deljiv sa četvrtim.

# 3. MEĐUNARODNA TAKMIČENJA

## 3.1. PRVA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1959

Prva međunarodna matematička olimpijada za učenike srednjih škola održana je od 23. do 26. jula 1959. godine u Rumuniji uz učešće ekipa: Bugarske (B), Mađarske (M), Nemačke Demokratske Republike (N), Poljske (P), Rumunije (R), SSSR (S), Čehoslovačke (Č). Takmičenje je održano u dva dela: prvog dana rađen je pismeni rad iz aritmetike i algebre sa trigonometrijom i drugog dana pismeni rad iz geometrije.

Sve ekipe imale su po 8 članova, osim ekipe SSSR koja je imala samo 4 člana.

Evo pregleda, po zadacima, broja mogućnih poena i zemalja predlagača.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | P | R | M | N | R | Č | |
| Broj poena | 5 | 8 | 7 | 5 | 8 | 7 | 40 |

Maksimalan broj poena osvojio je samo jedan takmičar, član ekipe Čehoslovačke. Broj osvojenih poena po zemljama učesnicama dat je u sledećoj tabeli (kako je ekipa SSSR imala upola manje učesnika, organizacioni komitet je odlučio da broj osvojenih poena ekipe SSSR pomnoži sa dva).

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 37-40 poena | II nagrada 36 poena | III nagrada 34 i 35 poena | Počasna diploma 25-33 poena |
|---|---|---|---|---|---|
| Rumunija | 249 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| Mađarska | 233 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| SSSR | $111 \cdot 2 = 222$ | — | — | 1 | 2 |
| Čehoslovačka | 192 | 1 | — | — | 4 |
| Bugarska | 131 | — | — | — | 1 |
| Poljska | 122 | — | — | — | 1 |
| Nemačka | 40 | — | — | — | — |

### *Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Dokazati da je razlomak $\frac{21n+4}{14n+3}$ nesvodljiv za svaki prirodan broj $n$.

**2.** Za koje realne vrednosti $x$ važi:

(a) $$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2},$$

(b) $$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1,$$

(c) $$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2,$$

pri čemu se za korenove uzimaju samo pozitivne vrednosti?

**3.** Data je jednačina po $\cos x$

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0 \qquad (a,\ b,\ c \text{ realni brojevi}).$$

Formirati pomoću brojeva $a$, $b$, $c$ kvadratnu jednačinu čiji bi koreni bile odgovarajuće vrednosti $\cos 2x$.

Uporediti polaznu i obrazovanu jednačinu za slučajeve $a=4$, $b=2$, $c=-1$.

### *Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** Konstruisati pravougli trougao $ABC$ ako je data njegova hipotenuza $c$ i ako je težišna linija koja odgovara hipotenuzi geometrijska sredina njegovih kateta.

**5.** U ravni je data duž $AB$ i na njoj proizvoljna tačka $M$. Nad dužima $AM$ i $BM$, kao nad stranama, konstruisani su kvadrati $AMCD$ i $BMEF$ koji se nalaze sa iste strane duži $AB$. Krugovi koji su opisani oko tih kvadrata seku se, osim u tački $M$, još i u tački $N$.

(a) Dokazati da prave $AE$ i $BC$ prolaze kroz tačku $N$.

(b) Dokazati da prava $MN$ prolazi kroz jednu stalnu tačku ravni nezavisno od položaja tačke $M$ na duži $AB$.

(c) Ispitati geometrijsko mesto sredine duži koja spaja centre konstruisanih kvadrata.

**6.** Dve ravni $P$ i $Q$ prolaze kroz pravu $p$. U ravni $P$ data je tačka $A$ i u ravni $Q$ tačka $C$; nijedna od ovih tačaka ne leži na pravoj $p$.

Konstruisati jednakokraki trapez sa osnovicama $AB$ i $CD$ u koji se može upisati krug, pri čemu tačka $B$ treba da leži u ravni $P$ i tačka $D$ u ravni $Q$.

## REZULTATI

**2.** a) $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

b) Ni za jedno $x$.

c) $x=\frac{3}{2}$.

**3.** $a^2\cos^2 2x+(2a^2+4ac-2b^2)\cos 2x+(a^2+4ac-2b^2+4c^2)=0$.

Za $a=4$, $b=2$, $c=-1$ data i dobijena jednačina imaju oblik

$$4\cos^2 x+2\cos x-1=0, \quad 4\cos^2 2x+2\cos 2x-1=0.$$

## 3.2. DRUGA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1960

Ova olimpijada održana je od 18. do 25. jula 1960. u Rumuniji. Učestvovale su ekupe Bugarske (B), Čehoslovačke (Č), Mađarske (M), Nemačke Demokratske Republike (N) i Rumunije (R).

I ova olimpijada je imala dva dela, koja su održana u dva različita dana. Prvog dana data su tri zadatka i vreme za njihovu izradu je bilo 3 sata. Drugog dana je bilo 4 zadatka i vreme za njihovu izradu je bilo 4 sata.

U sledećoj tabeli dat je pregled predlagača i broj poena za pojedine zadatke.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | B | M | R | M | Č | B | N |
| Broj poena | 8 | 6 | 6 | 5 | 7 | 8 | 5 |

Svaki takmičar je mogao osvojiti najviše 45 poena. Kako su ekipe imale po 8 članova (sem Nemačke koja je imala 7 članova), svaka ekipa je mogla osvojiti najviše 360 poena.

Evo uspeha prema broju osvojenih poena i nagrada pojedinih ekipa.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 45-41 poena | II nagrada 40-37 poena | III nagrada 36-33 poena | Popčasna diploma 32-29 poena |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 175 | — | — | 1 | 2 |
| Č | 258 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| M | 248 | 2 | 2 | — | 1 |
| N | 38 | — | — | — | — |
| R | 248 | 1 | 1 | 1 | 1 |

*Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Odrediti sve trocifrene brojeve koji pri deobi sa 11 daju količnik koji je jednak zbiru kvadrata cifara traženog broja.

**2.** Za koje vrednosti $x$ važi nejednakost

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9?$$

**3.** Dat je pravougli trougao $ABC$ čija je hipotenuza $BC$ podeljena na $n$ jednakih delova pri čemu je $n$ neparan broj. Sa $\alpha$ je označena veličina ugla pod kojim se iz tačke $A$ vidi onaj od $n$ jednakih delova koji sadrži sredinu hipotenuze datog trougla. Dužine visine i hipotenuze datog trougla označene su $h$ i $a$.

Dokazati da je $\operatorname{tg}\alpha=4nh/[(n^2-1)a]$.

*Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** Konstruisati trougao $ABC$ ako su date dužine $h_a$ i $h_b$ njegovih visina iz temena $A$ i $B$, kao i dužina $m_a$ težišne linije iz temena $A$.

5. Data je kocka $ABCDA'B'C'D'$.

(a) Odrediti geometrijsko mesto sredina duži $xy$, gde je $x$ proizvoljna tačka duži $AC$ i $y$ proizvoljna tačka duži $B'D'$.

(b) Odrediti geometrijsko mesto tačaka $z$ koje leže na duži $xy$ (saglasno prethodnom delu zadatka) i zadovoljavaju uslov $zy = 2zx$.

6. Dat je prav kružni konus u kome je upisana lopta. Oko te lopte opisan je pravi kružni cilindar, čija jedna osnova leži u ravni osnove datog konusa. Neka $V_1$ označava zapreminu konusa, $V_2$ zapreminu cilindra.

(a) Dokazati da ne može da važi jednakost $V_1 = V_2$.

(b) Odrediti najmanju vrednost $k$ za koju važi jednakost $V_1 = kV_2$ i za taj slučaj konstruisati ugao pri vrhu osnog preseka konusa.

7. Dat je jednakokraki trapez sa osnovama $a$ i $b$ i visinom $h$.

(a) Na osi simetrije tog trapeza konstruisati tačku $P$ iz koje se bočne strane trapeza vide pod pravim uglovima.

(b) Odrediti izraze za izračunavanje rastojanja tačke $P$ od jedne osnovice trapeza.

(c) Odrediti uslove pod kojima je mogućno konstruisati tačku $P$. (Ispitati slučajeve koji dolaze u obzir.)

REZULTATI

1. 550 i 803.

2. $-\frac{1}{2} \leq x < 0, \quad 0 < x < \frac{45}{8}$.

5. a) Neka su $E, F, G, H$ redom sredine duži $AD', AC', CB', CD'$. Traženo geometrijsko mesto tačaka je červorougao $EFGH$.

b) Neka su $E, F, G, H$ tačke koje duži $AD', AB', CB', CD'$ redom dele u odnosu 1:2. Traženo geometrijsko mesto tačaka je četvorougao $EFGH$.

6. b) $k = \frac{4}{3}$. Ako je $2\alpha$ ugao pri vrhu osnog preseka, tada je

$$\sin\alpha = \frac{1}{3}.$$

## 3.3. TREĆA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1961

Ova olimpijada održana je od 8. do 14. jula 1961. u Mađarskoj. Na ovoj olimpijadi učestvovale su ekipe od po 8 učenika iz sledećih zemalja: Bugarska (B), Čehoslovačka (Č), Mađarska (M), Nemačka Demokratska Republika (N), Poljska (P), Rumunija (R).

Evo pregleda poena i zemalja predlagača pojedinih zadataka.

| Zadatak | Algebra sa trigonometrijom | | | Geometrija | | | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | |
| Zemlja predlagač | M | P | B | B | Č | R | |
| Poena | 6 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 40 |

Olimpijada je održana u dva dana: prvog dana rađeni su zadaci iz algebre sa trigonometrijom a drugog dana iz geometrije. Oba dana zadaci su rađeni po 4 časa.

U sledećoj tabeli dat je pregled osvojenih poena, nagrada i pohvala za sve ekipe učesnice ovog takmičenja.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 37-40 poena | II nagrada 343-6 poena | III nagrada 30-33 poena | Pohvala 20-29 poena |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 108 | — | — | — | 1 |
| Č | 159 | — | — | 1 | 3 |
| M | 270 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| N | 146 | — | — | 1 | 3 |
| P | 203 | 1 | — | — | 6 |
| R | 197 | — | 1 | 1 | 3 |

### *Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Rešiti sistem jednačina

(1) $$x+y+z=a, \qquad x^2+y^2+z^2=b^2, \qquad xy=z^2,$$

u kome su $a$ i $b$ dati brojevi.

Izvesti uslove koje treba da zadovoljavaju $a$ i $b$ da bi brojevi $x$, $y$, $z$ koji predstavljaju rešenje sistema (1), bili pozitivni i međusobno različiti.

**2.** Dokazati nejednakost

$$a^2+b^2+c^2 \geqq 4P\sqrt{3},$$

gde su $a$, $b$, $c$ stranice i $P$ površina trougla.

U kom slučaju važi znak jednakosti?

**3.** Rešiti jednačinu

$$\cos^n x - \sin^n x = 1 \quad (n \text{ dati prirodan broj}).$$

### *Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** Dat je trougao $P_1P_2P_3$ i unutar njega proizvoljna tačka $P$. Presečne tačke pravih $P_1P$, $P_2P$, $P_3P$ sa stranicama $P_2P_3$, $P_3P_1$, $P_1P_2$ respektivno su $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$.

Dokazati da među količnicima

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \quad \frac{P_2P}{PQ_2}, \quad \frac{P_3P}{PQ_3},$$

postoji bar jedan koji nije veći od 2 i bar jedan koji nije manji od 2.

**5.** Konstruisati trougao $ABC$ ako su date stranice $AC=b$, $AB=c$, ugao $AMB=\omega\ (<90^0)$, gde je $M$ sredina stranice $BC$.

Dokazati da zadatak ima rešenja ako i samo ako je $b\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2} \leqq c < b$.

U kom slučaju važi znak jednakosti?

6. Data je ravan $E$ i s jedne njene strane tačke $A$, $B$, $C$ takve da ne leže na jednoj pravoj i da ravan koju određuju nije paralelna sa ravni $E$.

U ravni $E$ uzete su tri proizvoljne tačke $A'$, $B'$, $C'$. Neka su $L$, $M$, $N$ respektivno sredine duži $AA'$, $BB'$, $CC'$ i $G$ težište trougla $LMN$. (Ovde se ne posmatraju takvi položaji tačaka $A'$, $B'$, $C'$, za koje tačke $L$, $M$, $N$ nisu temena trougla.)

Odrediti geometrijsko mesto tačke $G$ koje nastaje ako se tačke $A'$, $B'$, $C'$ kreću nezavisno jedna od druge u ravni $E$.

REZULTATI

1. $$x_{1,2}=\frac{a^2+b^2}{4a}\pm\frac{\sqrt{10\,a^2b^2-3\,a^4-3\,b^4}}{4a},$$

$$y_{1,2}=\frac{a^2+b^2}{4a}\mp\frac{\sqrt{10\,a^2b^2-3\,a^4-3\,b^4}}{4a},$$

$$z_{1,2}=\frac{a^2-b^2}{2a}.$$

Za $|b|<a<|b|\sqrt{3}$ $x$, $y$, $z$ su pozitivni i različiti.

3. Za $n$ parno: $x=k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$;
Za $n$ neparno $x=2\,m\pi$ $(m=0, \pm1, \pm2, \ldots)$,

$$x=2\,r\pi+\frac{3}{2}\pi \quad (r=0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

## 3.4. ČETVRTA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1962

Na četvrtoj međunarodnoj matematičkoj olimpijadi koja je održana od 3. do 16. jula 1962. u Čehoslovačkoj učestvovale su ekipe Bugarske (B), Mađarske (M), Nemačke Demokratske Republike (N), Poljske (P), Rumunije (R), Sovjetskog Saveza (S) i Čehoslovačke (Č).

Ekipe su sačinjavali po 8 takmičara i dva rukovodioca. Takmičari su bili, po pravilu, učenici dva završna razreda srednjih škola. Sve zemlje učesnice dostavile su predloge zadataka, od kojih je specijalni žiri odabrao 12 zadataka, od kojih je međunarodni žiri odabrao 7 za takmičenje. U sledećoj tabeli dat je, po zadacima, pregled poena i zemalja predlagača.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | P | M | Č | R | B | N | S | |
| Poena | 6 | 6 | 8 | 5 | 7 | 6 | 8 | 46 |

Takmičenje je održano u dva dana. Prvog dana su bila tri zadatka i vreme za njihovu izradu je 3 sata. Drugog dana su bila četiri zadatka za čiju izradu je predviđeno vreme od 4 sata.

Evo pregleda uspeha pojedinih ekipa-učesnica.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 41-46 poena | II nagrada 34-40 poena | III nagrada 29-33 poena |
|---|---|---|---|---|
| B | 196 | — | 1 | 2 |
| Č | 212 | — | 1 | 3 |
| M | 289 | 2 | 3 | 2 |
| N | 153 | — | 1 | — |
| P | 212 | — | 1 | 3 |
| R | 257 | — | 3 | 3 |
| S | 263 | 2 | 2 | 2 |

### *Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Odrediti najmanji prirodan broj $n$ sa sledećim osobinama:

(a) Napisan u dekadnom sistemu, taj broj se završava sa cifrom 6;

(b) Ako se cifra 6 prebaci sa poslednjeg na prvo mesto dobija se broj koji je četiri puta veći od polaznog broja.

**2.** Odrediti sve realne brojeve $x$ koji zadovoljavaju nejednačinu

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}.$$

**3.** Data je kocka $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$ i $A'B'C'D'$ respektivno gornja i donja osnova; $AA' \| BB' \| CC' \| DD'$). Tačka $X$ kreće se konstantnom brzinom po stranicama kvadrata $ABCD$ u smeru $ABCDA$, dok se tačka $Y$ kreće sa istom brzinom po stranicama kvadrata $B'C'CB$ u smeru $B'C'CBB'$. Tačke $X$ i $Y$ počinju da se kreću istovremeno iz tačaka $A$ i $B'$ respektivno.

Odrediti i nacrtati geometrijsko mesto sredine $Z$ duži $XY$.

### *Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** Rešiti jednačinu

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1.$$

**5.** Na krugu $k$ date su tri različite tačke $A$, $B$, $C$. Konstruisati (pomoću šestara i lenjira) četvrtu tačku $D$ na krugu $k$ tako da se u dobijenom konveksnom četvorouglu može upisati krug.

**6.** Dokazati da za jednakokraki trougao važi jednakost

$$d=\sqrt{R(R-2r)},$$

gde su $R$, $r$ respektivno poluprečnici opisanog i upisanog kruga u trouglu i $d$ rastojanje između centara tih krugova.

**7.** Tetraedar $SABC$ ima osobinu da postoji pet sfera koje dodiruju ivice $SA$, $SB$, $SC$, $AB$, $BC$, $CA$ ili njihova produženja.

Dokazati: ($a$) da je tetraedar pravilan; ($b$) obrnuto, da za svaki pravilan tetraedar postoje pet takvih sfera.

## REŠENJA I REZULTATI

**1.** Neka je $n$ traženi broj. Tada je

$$n=\overline{a_1 a_2\cdots a_{n-1}6},\qquad k=4n=\overline{6a_1a_2\cdots a_{n-1}}.$$

Kako je 6 poslednja cifra broja $n$, poslednja cifra broja $4n$ mora biti 4, tj. $a_{n-1}=4$. Zamenjujući ovu vrednost u $n$, posle množenja sa 4 dobijamo $a_{n-2}=8$. Ovaj postupak ponavljamo sve dok u broju $4n$ ne dobijemo cifru 6. Tako ćemo dobiti broj 153846, koji zaista zadovoljava uslove zadatka.

*Primedba.* Svaki broj oblika $153846153846\cdots153846$ ima gornju osobinu, međutim najmanji je ovaj koji je gore naveden.

**2.** Da bi data nejednakost imala smisla, mora biti $3-x\geqq 0$ i $x+1\geqq 0$. Data nejednakost je ekvivalentna sa

$$\sqrt{3-x}>\frac{1}{2}+\sqrt{x+1}\Rightarrow\frac{7}{4}-2x>\sqrt{x+1}.$$

Da bi leva strana poslednje nejednakosti bila veća od pozitivnog broja, mora i sama da bude veća od nule, tj. $\frac{7}{4}-2x>0$. U tom slučaju poslednja nejednakost ekvivalentna je sa $64x^2-128x+33>0$. Prema tome, data nejednakost ekvivalentna je sa sistemom nejednakosti

$$3-x\geqq 0,\quad x+1\geqq 0,\quad \frac{7}{4}-2x>0,\quad 64x^2-128x+33>0$$

odakle sleduje

$$-1\leqq x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}.$$

**3.** Neka su $O_1$, $O_2$, $O_3$ respektivno centri kvadrata $ABB'A'$, $BB'C'C$, $ABCD$. Tačka $Z$, sredina duži $XY$, opisuje tada romb $O_1O_2CO_3O_1$.

**4.** Kako je $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$, data jednačina je ekvivalentna sa

$$\cos 2x+\cos 4x+2\cos^2 3x=0.$$

Poslednju jednačinu možemo transformisati u

$$2\cos 3x\cdot\cos x+2\cos^2 3x=0,\quad \text{tj.}\quad 2\cos 3x(\cos x+\cos 3x)=0.$$

Odavde je

$$\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots),$$

$$\cos x=-\cos 3x\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+m\frac{\pi}{2},\quad x=\frac{\pi}{6}+n\frac{\pi}{3}\quad (m, n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

## 3.5. PETA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1963

Ova olimpijada održana je od 5. do 13. jula 1963. u Poljskoj. Na njoj su prvi put učestvovali i predstavnici Jugoslavije. Inače, učestvovalo je ukupno osam ekipa: Bugarske (B), Čehoslovačke (Č), Jugoslavije (J), Mađarske (M), Nemačke Demokratske Republike (N), Poljske (P), Rumunije (R) i Sovjetskog Saveza (S).

Takmičenje je održano u dva dana. Svakog dana je bilo po tri zadatka, za čiju je izradu bilo predviđeno vreme od 4 sata (svakog dana).

Evo pregleda poena po zadacima kao i pregleda koja je ekipa predložila koji zadatak.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | Č | S | M | S | N | M | |
| Broj poena | 6 | 7 | 7 | 6 | 6 | 8 | 40 |

Pregled osvojenih poena i nagrada pojedinih ekipa dat je sledećom tabelom.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 40-35 poena | II nagrada 34-28 poena | III nagrada 27-21 poen |
|---|---|---|---|---|
| B | 145 | — | — | 3 |
| Č | 151 | 1 | — | 1 |
| J | 165 | 1 | 2 | 1 |
| M | 234 | — | 5 | 3 |
| N | 140 | — | — | 3 |
| P | 136 | — | — | 2 |
| R | 191 | 1 | 1 | 3 |
| S | 271 | 4 | 3 | 1 |

### *Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Odrediti sve realne korene jednačine

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x,$$

gde je $p$ realan broj.

**2.** Odrediti u prostoru geometrijsko mesto temena pravog ugla čiji jedan krak prolazi kroz datu tačku $A$, a drugi krak ima najviše jednu zajedničku tačku sa duži $BC$.

**3.** Ako su u konveksnom $n$-touglu svi uglovi jednaki a uzastopne strane ispunjavaju uslove $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots \geqq a_n$, dokazati da je

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n.$$

### *Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** Odrediti sva rešenja $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, sistema jednačina

$$x_5+x_2=yx_1, \quad x_1+x_3=yx_2, \quad x_2+x_4=yx_3, \quad x_3+x_5=yx_4, \quad x_4+x_1=yx_5,$$

gde je $y$ realan parametar.

**5.** Dokazati jednakost $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

**6.** 5 učenika su učestvovali na jednom konkursu. Pokušavajući da pogodi rezultate takmičenja, neko je pretpostavio da će se dobiti redosled $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, ali se ispostavilo da on nije tačno odredio mesto bilo koga od učesnika niti bilo koji par učenika koji bi trebalo da dolaze jedan za drugim. Neko drugi, pretpostavljajući da je rezultat $D$, $A$, $E$, $C$, $B$, pravilno je pogodio mesto dvojice učenika, a isto tako i dva para učenika (koji su išli tačno po redosledu). Kakav je bio u stvari rezultat na konkursu?

## REŠENJA I REZULTATI

**1.** Iz date jednačine zaključujemo da mora biti

(1)
$$x \geqq 0 \text{ (jer je leva strana nenegativna),}$$
$$x^2 \geqq p, \quad x^2 \geqq 1 \text{ (jer tražimo realna rešenja).}$$

U ovom slučaju data jednačina je ekvivalentna sa

(2)
$$4\sqrt{x^2-p}\sqrt{x^2-1}=p+4-4x^2.$$

Kako je leva strana poslednje jednačine nenegativna, mora biti $p+4-4x^2 \geqq 0$; tada se iz (2), posle kvadriranja, dobija

$$8(2-p)x^2=(4-p)^2.$$

Za $p=2$ poslednja jednakost daje $0=4$, što je nemogućno. Pretpostavimo da je $p \neq 2$. Tada dobijamo

(3)
$$x^2=\frac{(4-p)^2}{8(2-p)}.$$

Iz (3) i (1) sleduje $0 \leqq p \leqq \frac{4}{3}$. U ovom slučaju, vodeći računa o uslovu $x \geqq 0$, iz (3) izlazi

(4)
$$x=\frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}.$$

Prema tome, jednačina ima rešenje samo za $0 \leqq p \leqq \frac{4}{3}$ i tada je rešenje određeno sa (4).

**3.** Neka je $n=2k+1$. Konstruišimo simetralu ugla $A_1$ koji obrazuju stranice $a_1$ i $a_{2k+1}$. Može se dokazati da je ova simetrala normalna na stranici $A_{k+1}A_{k+2}$. Projektujmo zatim izlomljene krive $A_1A_2A_3\ldots A_{k+1}$ i $A_1A_nA_{n-1}A_{n-2}\ldots A_{k+2}$ na simetralu. Ove projekcije su jednake. Stranice $A_iA_{i+1}$ i $A_{n-i+2}A_{n-i+1}$ $(i \leqq k)$ obrazuje jednake uglove sa simetralom. Prema tome, proj $A_iA_{i+1} \geqq$ proj $A_{n-i+2}A_{n-i+1}$. Znači, ako u nizu $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots \geqq a_n$ postoji bar jedna stroga nejednakost, važiće stroga nejednakost i za projekcije, što je nemogućno.

U slučaju $n=2k$, dokaz je analogan, samo projektovanje treba vršiti na pravu koja je normalna na stranicama $A_1A_n$ i $A_kA_{k+1}$.

**4.** 1° Za $y=2$, $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x$ ($x$ proizvoljno).

2° $y \neq 2$ i $y^2+y-1 \neq 0$, $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$.

3° $y^2+y-1=0$, $x_1$ i $x_5$ proizvoljni, $x_2=yx_1-x_5$, $x_3=-y(x_1+x_5)$, $x_4=yx_5-x_1$, gde je $y$ jedno rešenje jednačine $y^2+y-1=0$.

5. Jedno za drugim imamo

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)}{2\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$=\frac{\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{14}-\cos\frac{5\pi}{14}-\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{7\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{1}{2}.$$

6. *EDACB.*

## 3.6. ŠESTA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1964

Od 1. do 9. jula 1964. godine održana je u Moskvi VI međunarodna matematička olimpijada učenika srednjih škola.

Na olimpijadi su učestvovale ekipe: Bugarske (B), mađarske (M), Mongolije (Mo), Nemačke Demokratske Republike (N), Poljske (P), Rumunije (R), Sovjetskog saveza (S), Čehoslovačke (Č) i Jugoslavije (J). Ekipa Mongolije je prvi put učestvovala na olimpijadi.

Pored rukovodioca i njegovog zamenika svaka ekipa je imala u svom sastavu po 8 učenika, koji su bili pobednici nacionalnih olimpijada u 1964. godini.

Prema propozicijama svaka zemlja-učesnica poslala je svoje zadatke, osim Sovjetskog Saveza kao organizatora olimpijade i Mongolije, koja se prijavila sa zakašnjenjem. Od ovih zadataka sovjetski članovi žirija, profesor A. I. Markuševič, predsednik organizacionog komiteta VI međunarodne matematičke olimpijade, profesor A. A. Kirilov, zamenik predsednika, i ostali, izabrali su 14 zadataka.

Žiri, koji su sačinjavali pored navedenih sovjetskih delegata i rukovodioci ekipa zemalja-učesnica, izabrao je 1. jula 6 zadataka.

Takmičari su 4. jula rešavali tri zadatka i 5. jula takođe tri zadatka, za vreme od 4 sata svakog dana.

Svi zadaci su bili vezani za određen broj poena. Maksimalan broj poena iznosio je 42. Kako su zadaci poentirani i koje su zemlje predložile pojedine zadatke, prikazano je u sledećoj tabeli.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | Č | M | J | M | R | P | |
| Poena | 7 | 7 | 6 | 6 | 7 | 9 | 42 |

Plasman zemalja učesnica prema broju osvojenih poena i nagrada može se videti iz sledeće tabele.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 42-37 poena | II nagrada 36-31 poen | III nagrada 30-27 poena |
|---|---|---|---|---|
| B | 198 | — | — | 3 |
| Č | 194 | — | 2 | 2 |
| J | 155 | — | 1 | 1 |
| M | 253 | 3 | 1 | 1 |
| Mo | 169 | — | — | 1 |
| N | 196 | — | 1 | 2 |
| P | 209 | 1 | 1 | 3 |
| R | 213 | — | 2 | 3 |
| S | 269 | 3 | 1 | 3 |

### *Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** 1° Odrediti sve cele pozitivne brojeve $n$ za koje je broj $2^n-1$ deljiv sa 7.
2° Dokazati da ne postoji ceo pozitivan broj $n$ za koji je $2^n+1$ deljiv sa 7

**2.** Ako su $a$, $b$, $c$ strane trougla, dokazati da je

(1) $$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqq 3\,abc.$$

**3.** U trougao $ABC$ sa stranama $a$, $b$, $c$ upisan je krug i povučene su tangente ovoga kruga paralelno stranama datog trougla. Te tangente obsecaju od trougla $ABC$ tri nova trougla. U svaki od tako dobijenih trouglova upisan je krug. Izračunati zbir površina sva četiri kruga.

**4.** Svaki od 17 naučnika dopisuje se sa ostalima. U njihovoj prepisci reč se vodi samo o tri teme; svaki par naučnika dopisuje se jedan s drugim samo u vezi sa jednom temom. Dokazati da postoje bar tri naučnika koji se između sebe dopisuju po jednoj istoj temi.

### *Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**5.** Dato je pet tačaka u ravni. Prave, koje spajaju te tačke, nisu međusobno paralelne, niti normalne, niti se poklapaju. Kroz svaku tačku povlačimo normale na sve prave, koje je mogućno konstruisati, spajajući u parovima ostale četiri tačke. Koliki je maksimalan broj tačaka preseka tih normala, ne računajući pet datih tačaka?

**6.** Dat je tetraedar $ABCD$. Teme $D$ je spojeno sa težištem osnove, tačkom $D_1$. Kroz temena trougla $ABC$ povučene su prave, paralelne pravoj $DD_1$ do preseka sa suprotnim stranama tetraedra u tačkama $A_1$, $B_1$, $C_1$. Dokazati da je zapremina tetraedra $ABCD$ tri puta veća od zapremine tetraedra $A_1B_1C_1D_1$. Da li je ovo tačno ako je $D_1$ proizvoljna tačka u trouglu $ABC$?

## REŠENJA I REZULTATI

**1.** 1° Na osnovu ekvivalencije $2^n-1=7m \Leftrightarrow 2^{n+3}-1=7(8m+1)=7m_1$ i iz činjenice da su $n=3$ i $n=6$ dva najmanja prirodna broja takva da je $2^n-1$ deljivo sa 7, zaključujemo da svi brojevi oblika $n=3k$ imaju traženu osobinu. Brojevi oblika $n=3k+1$ i $n=3k+2$ nemaju traženu osobinu jer bi na osnovu navedene ekvivalencije tu osobinu imali i brojevi $n=4$ i $n=5$, što nije tačno.

2° Kako je $2n+1=7m \Leftrightarrow 2^{n+3}+1=7m_1=7(8m-1)$, izlazi da $2^n+1$ nije deljivo sa 7 ako je $n=3k$, $n=3k+1$, $n=3k+2$, jer bi u protivnom $2^n+1$ bilo deljivo sa 7 za $n=3$, $n=4$, $n=5$, što nije tačno.

**2.** Stavimo $b+c-a=x$, $c+a-b=y$, $a+b-c=z$, tj.

$$a=\frac{1}{2}(y+z),\quad b=\frac{1}{2}(z+x),\quad c=\frac{1}{2}(x+y).$$

Kako su $a$, $b$, $c$ strane jednog trougla, biće $x>0$, $y>0$, $z>0$. Nejednakost (1) postaje

$$6xyz\leqq xz^2+xy^2+yz^2+yx^2+zx^2+zy^2,$$

tj.

$$\frac{xz^2+xy^2+yz^2+yx^2+zx^2+zy^2}{6}\geqq\sqrt[6]{xz^2\cdot xy^2\cdot yz^2\cdot yx^2\cdot zx^2\cdot zy^2}\,. \tag{2}$$

Ova nejednakost je tačna jer predstavlja odnos između aritmetičke i geometrijske sredine šest navedenih brojeva.

Ako je

$$xz^2=xy^2=yz^2=yx^2=zx^2=zy^2,$$

tj. $x=y=z$ (za $x\geqq0$, $y\geqq0$, $z\geqq0$), tada u (2) važi znak jednakosti.

Ovim je dokazana nejednakost (1). Ona takođe važi pod slabijim ograničenjem, naime $a\geqq0$, $b\geqq0$, $c\geqq0$; tada je najviše jedan od brojeva $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ negativan.

**3.** Izaberimo nasumice jednog naučnika. On se dopisuje sa ostalih 16 naučnika. Po jednoj od tri teme on se dopisuje bar sa 6 naučnika, inače on bi se dopisivao sa najviše 15 naučnika, što bi protivurečilo uslovima zadatka. Neka je to tema $A$. Ako se između tih 6 naučnika nađu dva koji se dopisuju po temi $A$, tražena trojka je pronađena. Međutim, postoji varijanta kada se nijedan od tih 6 naučnika ne dopisuje sa drugim po temi $A$. U tom slučaju oni se međusobno dopisuju po drugim dvema temama. Uočimo jednog od ovih 6 naučnika. On se dopisuje sa ostalih pet naučnika po temama $B$ i $C$. Po jednoj temi on se dopisuje bar sa tri naučnika. Neka je to tema $B$. Ako se dva od ta tri naučnika dopisuju međusobno po temi $B$, zadatak je rešen. Ako se sva tri naučnika dopisuju međusobno po temi $C$, oni obrazuju traženu trojku. S obzirom da su svi slučajevi razmotreni, dokazano je da će se tražena trojka naučnika uvek naći.

**4.** Ukupan broj pravih koje se seku u 5 tačaka iznosi $C_5^2=10$. Kroz svaku tačku prolaze 4 prave. Izaberimo, na primer, tačke $A$ i $B$. Pošto kroz $A$ prolaze 4 prave, iz te tačke mogućno je povući 6 normala. Uzmimo i tačku $B$. Normale spuštene iz tačke $B$ na prave koje prolaze kroz $A$ seku sve normale spuštene iz $A$. Prema tome, ukupan broj preseka ovih normala je $3\cdot6=18$. S druge strane, svaka druga normala iz tačke $B$ na ostale tri prave koje ne prolaze kroz $B$, seče 5 normala iz tačaka $A$, jer se druge mormale ne seku, s obzirom da su spuštene na istu pravu. Na taj način dobija se još 15 tačaka, pa je ukupan broj tačaka $18+15=33$. Od 5 tačaka mogućno je sastaviti 10 ovakvih parova. Prema tome, preseka ima najviše $33\cdot10=330$. Međutim, neke od ovih tačaka se poklapaju. Zaista, svake tri od datih 5 tačaka obrazuju trougao. Visine takvih trouglova seku se u jednoj tački. S obzirom da ovih trouglova ima $C_5^2=10$ i da su ove tačke uračunate 3 puta, preseka nema više od $330-20=310$.

## 3.7. SEDMA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1965

Sedma matematička olimpijada održana je u Nemačkoj Demokratskoj Republici od 3. do 13. jula 1965. Deset zemalja (do sada najveći broj) poslalo je svoje ekipe i to: Bugarska (B), Čehoslovačka (Č), Finska (F), Jugoslavija (J), Mađarska (M), Mongolija (Mo), Nemačka Demokratska Republika (N), Poljska (P), Rumunija (R), SSSR (S).

Ispit je održan u dva dana i trajao je po 4 sata svakog dana. Ukupno je bilo 6 zadataka — svakog dana po tri.

Evo pregleda zadataka po poenima i zemlji predlagaču.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | J | P | Č | S | R | P | |
| Broj poena | 4 | 6 | 8 | 6 | 7 | 9 | 40 |

Uspeh ekipa dat je u sledećoj tabeli.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 40-38 poena | II nagrada 37-30 poena | III nagrada 29-20 poena |
|---|---|---|---|---|
| B | 93 | — | — | 1 |
| Č | 159 | — | 1 | 3 |
| F | 62 | — | — | — |
| J | 137 | — | — | 2 |
| M | 244 | 3 | 2 | 2 |
| Mo | 63 | — | — | — |
| N | 175 | — | 2 | 3 |
| P | 178 | — | 1 | 3 |
| R | 222 | — | 4 | 3 |
| S | 281 | 5 | 2 | — |

Osim nagrada iznetih u prethodnoj tabeli dodeljene su počasne diplome osmorici učesnika koji su se posebno istakli u rešavanju pojedinih zadataka. Među njima su po jedan Finac i Mongolac.

### *Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Odrediti sve vrednosti $x$ koje pripadaju segmentu $0 \leqq x \leqq 2\pi$ i zadovoljavaju nejednakosti

$$2\cos x \leqq \left| \sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x} \right| \leqq \sqrt{2}.$$

**2.** Dat je sistem jednačina

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0,$$

čiji koeficijenti ispujavaju sledeće uslove: a) $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$ su pozitivni, b) svi ostali koeficijenti su negativni, c) u svakoj jednačini zbir koeficijenata je pozitivan.

Dokazati da je jedino rešenje sistema $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

**3.** Dat je tetraedar $ABCD$ čije ivice $AB$ i $CD$ imaju dužine $a$ i $b$. Neka je $d$ rastojanje između mimoilaznih pravih $AB$ i $CD$ i veličina ugla između tih pravih neka je $\omega$. Tetraedar je sa ravni $P$, koja je paralelna ivicama $AB$ i $CD$, presečen na dva dela. Izračunati odnos zapremina tih delova ako se zna da je odnos rastojanja $P$ do $AB$ i $P$ do $CD$ jednak $k$.

***Zadaci sa drugog dana takmičenja***

**4.** Naći četiri realna broja $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ takva da svaki od njih sabran sa proizvodom ostala tri daje 2.

**5.** Neka je $\sphericalangle AOB=\alpha(\alpha<90^0)$ ugao trougla $AOB$. Iz proizvoljne tačke $M$ trougla $AOB$, koja se ne poklapa sa $O$, povučene su normale $MP$ na $OA$ i $MQ$ na $OB$. Neka je $H$ ortocentar trougla $OPQ$.

Odrediti geometrijsko mesto tačaka $H$ kada: (a) $M$ opisuje duž $AB$, (b) $M$ opisuje unutrašnju oblast trougla $AOB$.

**6.** U ravni je dato $n\geqq 3$ tačaka. Neka je $d$ maksimalno rastojanje između ma koje dve od tih $n$ tačaka. Rastojanja između tačaka koja su jednaka $d$ nazvaćemo dijametrima datog sistema tačaka. Dokazati da tih dijametara ne može biti više od $n$.

## REŠENJA I REZULTATI

**1.** Ako je $\cos x\leqq 0$, leva strana nejednakosti je zadovoljena. Pretpostavimo sada da je $\cos x>0$. Tada, posle dizanja na kvadrat, dobijamo

$$4\cos^2 x\leqq 2-2\sqrt{\cos^2 x}\Rightarrow|\cos 2x|\leqq 1-2\cos^2 x=-\cos 2x\Rightarrow\cos 2x\leqq 0$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{4}+k\pi\leqq x\leqq\frac{3}{4}\pi+k\pi\qquad(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots).$$

Kako mora biti $\cos x>0$, dobijamo $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$ i $\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$. Kombinujući ova rešenja sa slučajem kada je $\cos x\leqq 0$, dobijamo na kraju $\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{7}{4}\pi$.

Desna strana date nejednakosti ekvivalentna je sa nejednakošću

$$-2\sqrt{\cos^2 2x}\leqq 0,$$

koja važi za sve vrednosti $x$. Prema tome, tražene vrednosti $x$ su

$$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{7}{4}\pi.$$

**2.** Ako se iz datog sistema eliminišu nepoznate $x_1$ i $x_2$, dobija se

$$x_3(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23})=0$$

tj. ako izraz u zagradi označimo sa $D$,

$$x_3\cdot D=0.$$

Slično je $x_2\cdot D=0$ i $x_1\cdot D=0$. Ako bi postojalo bar jedno rešenje takvo da je $x_1x_2x_3\neq 0$, moralo bi biti $D=0$. Dokazaćemo da je uvek $D\neq 0$. Ako se stavi

$$\alpha=a_{11}+a_{12}+a_{13},\qquad\beta=a_{21}+a_{22}+a_{23},\qquad\gamma=a_{31}+a_{32}+a_{33},$$

$D$ se može transformisati na sledeći način

$$D=\alpha(-a_{21}-a_{23}+\beta)(-a_{31}-a_{32}+\gamma)+\beta(-a_{12}-a_{13})(-a_{31}-a_{32}+\gamma)$$
$$+\gamma(-a_{12}-a_{13})(-a_{21}-a_{23})-a_{12}a_{21}\gamma-a_{13}a_{31}\beta-a_{23}a_{32}\alpha$$
$$>\alpha a_{23}a_{32}+\beta a_{13}a_{31}+\gamma a_{12}a_{21}-a_{12}a_{21}\gamma-a_{13}a_{31}\beta-a_{23}a_{32}\alpha=0.$$

Prema tome je $D\neq 0$, pa je jedino rešenje $x_1=x_2=x_3=0$.

3. $V_2:V_1=k^2(k+3)/(3k+1)$.

4. Traženi brojevi su rešenja sistema jednačina

$$x_1+x_2x_3x_4=2,\quad x_2+x_3x_4x_1=2,\quad x_3+x_4x_1x_2=2,\quad x_4+x_1x_2x_3=2.$$

Oduzimajući drugu od prve jednačine, dobijamo

$$(x_1-x_2)(1-x_3x_4)=0 \Rightarrow x_1=x_2 \vee x_3x_4=1.$$

Analogno se dobija

$$x_1=x_3 \vee x_2x_4=1,\qquad x_2=x_4 \vee x_1x_3=1,\qquad x_3=x_4 \vee x_1x_2=1.$$

Prema tome, posmatrani sistem može se zameniti sa

$$(x_1=x_2 \vee x_3x_4=1)\wedge(x_1=x_3 \vee x_2x_4=1)\wedge(x_3=x_4 \vee x_1x_2=1)\wedge(x_2=x_4 \vee x_1x_3=1).$$

Kombinovanjem raznih mogućnosti, isključujući pri tome simetrične slučajeve, dobijamo

(1) $x_1=x_2,\quad x_2x_4=1,\quad x_1x_3=1,\quad x_3=x_4,$

(2) $x_1=x_2,\quad x_1=x_3,\quad x_1x_3=1,\quad x_1x_2=1,$

(3) $x_1=x_2,\quad x_2x_4=1,\quad x_1x_3=1,\quad x_1x_2=1,$

(4) $x_3x_4=1,\quad x_2x_4=1,\quad x_1x_3=1,\quad x_1x_2=1,$

(5) $x_1=x_2,\quad x_1=x_3,\quad x_2=x_4,\quad x_1x_2=1,$

(6) $x_1=x_2,\quad x_1=x_3,\quad x_2=x_4,\quad x_3=x_4.$

Rešavanjem sistema (1), (2), (3), (4), (5) i (6) dobijamo da su traženi brojevi 1, 1, 1, 1 ili 3, −1, −1, −1.

5. (a) Geometrijsko mesto je duž $H_1H_2$, gde je $H_1$ podnožje visine spuštene iz tačke $A$ na $OB$, i $H_2$ podnožje visine spuštene iz tačke $B$ na $OA$.

(b) Traženo geometrijsko mesto je unutrašnjost trougla $OH_1H_2$.

## 3.8. OSMA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1966

Ova olimpijada održana je od 1. do 14. jula 1966. u Bugarskoj. Na njoj su učestvovale ekipe iz devet zemalja: Bugarske (B), Čehoslovačke (Č), Jugoslavije (J), Mađarske (M), Mongolije (Mo), Nemačke Demokratske Republike (N), Poljske (P), Rumunije (R) i Sovjetskog Saveza (S). Sve ekipe su imale po 8 članova, koje su u dva dana rešavale 6 zadataka (svakog dana po 3 zadatka). Vreme trajanja ispita bilo je 4 sata svakog dana.

U sledećoj tabeli dat je pregled zadataka sa poenima i zemljom predlagačem.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | S | M | B | J | Č | P | |
| Broj poena | 6 | 7 | 7 | 5 | 7 | 8 | 40 |

Iz priložene tabele se vidi da je svaki kandidat mogao da osvoji najviše 40 poena a svaka ekipa najviše 320 poena. U sledećoj tabeli dat je pregled osvojenih poena i nagrada.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 39-40 poena | II nagrada 34-38 poena | III nagrada 31-33 poena |
|---|---|---|---|---|
| B | 238 | — | 1 | 3 |
| Č | 215 | — | 1 | 2 |
| J | 224 | — | 2 | 1 |
| M | 281 | 3 | 2 | 1 |
| Mo | 88 | — | — | — |
| N | 280 | 3 | 3 | — |
| P | 269 | 1 | 4 | 1 |
| R | 257 | 1 | 1 | 2 |
| S | 293 | 5 | 1 | 1 |

## *Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Na olimpijadi su zadata tri zadatka A, B, C. 25 učesnika je rešilo bar jedan zadatak. Od učesnika, koji nisu rešili zadatak A, broj onih koji su rešili zadatak B je dva puta veći od broja onih koji su rešili zadatak C. Broj učesnika koji su rešili samo zadatak A je za 1 veći od svih ostalih učesnika koji su takođe rešili zadatak A. Koliko učesnika je rešilo samo zadatak B, ako od učesnika koji su rešili samo jedan zadatak polovina njih nije rešila zadatak A?

**2.** Za uglove i strane jednog trougla važi jednakost

$$a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta).$$

Dokazati da je trougao jednakokrak.

**3.** Neka je $ABCD$ pravilan tetraedar i $M$ njegova proizvoljna tačka. Dokazati nejednakost

$$MA+MB+MC+MD\geq 4R,$$

gde je $R$ poluprečnik sfere opisane oko tetraedra $ABCD$.

## *Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** Dokazati da za svaki prirodan broj $n$ i svako $x\neq\frac{\nu\pi}{2^k}$ $(k=0, 1, \ldots, n;\ \nu$ ceo broj) važi identitet

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{cotg}x-\operatorname{cotg}2^n x.$$

**5.** Rešiti sistem

$$\begin{aligned}
|a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4&=1,\\
|a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4&=1,\\
|a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4&=1,\\
|a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3&=1,
\end{aligned}$$

gde su $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ različiti realni brojevi.

**6.** Na stranama $AB$, $BC$, $CA$ trougla $ABC$ uzete su respektivno tačke $M$, $K$, $L$ koje su različite od $A$, $B$, $C$. Dokazati da površina bar jednog od trouglova $MAL$, $KBM$, $LCK$ nije veća od četvrtine površine trougla $ABC$.

## 3.9. DEVETA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1967

Na devetoj međunarodnoj olimpijadi koja je održana od 2. do 12. jula 1967. godine u Jugoslaviji (Cetinje) učestvovale su ekipe trinaest zemalja: Bugarske (B), Čehoslovačke (Č), Engleske (E), Francuske (F), Italije (I), Jugoslavije (J), Mađarske (M), Mongolije (Mo), Nemačke Demokratske Republike (N), Poljske (P), Rumunije (R), SSSR (S) i Švedske (Š). Ekipa Francuske imala je 5 članova, ekipa Italije 6, dok su sve ostale ekipe imale po 8 članova.

U sledećoj tabeli dat je pregled zadataka sa poenima i zemljom predlagačem.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | P | Č | E | I | S | M | |
| Broj poena | 6 | 7 | 8 | 6 | 7 | 8 | 42 |

Pregled osvojenih nagrada i poena po ekipama dat je u sledećoj tabeli.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 42-38 poena | II nagrada 37-30 poena | III nagrada 29-22 poena | Počasna diploma |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 159 | 1 | — | 1 | 1 |
| Č | 159 | — | 1 | 3 | — |
| E | 231 | 1 | 2 | 4 | 1 |
| F | 41 | učestvovala samo drugog dana | | | |
| I | 110 | — | 1 | 1 | |
| J | 136 | — | — | 3 | |
| M | 251 | 2 | 3 | 3 | |
| Mo | 87 | — | — | 1 | |
| N | 257 | 3 | 3 | 1 | |
| P | 101 | — | — | 1 | |
| R | 214 | 1 | 1 | 4 | |
| S | 275 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| Š | 135 | — | — | 2 | |

### *Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Neka je dat paralelogram $ABCD$ u kome je: $AB=a$, $AD=1$ i $\sphericalangle DAB=\alpha$. Neka je trougao $ABD$ oštrougli.

Dokazati da četiri kruga $K_A$, $K_B$, $K_C$, $K_D$ poluprečnika 1, sa centrima u tačkama $A$, $B$, $C$, $D$, potpuno prekrivaju paralelogram $ABCD$ ako i samo ako je $a \leqq \cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$.

2. U tetraedru je tačno jedna ivica veća od 1. Ako je $V$ zapremina toga tetraedra, dokazati da je $V \leq \frac{1}{8}$.

3. Neka su $k, m, n$ prirodni brojevi takvi da je $k+m+1$ prost broj veći od $n+1$. Ako je $c_s = s(s+1)$, dokazati da je proizvod

$$(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)\cdots(c_{m+n}-c_k)$$

deljiv sa $c_1 c_2 \cdots c_n$.

*Zadaci sa drugog dana takmičenja*

4. Data su dva oštrougla trougla $A_0B_0C_0$ i $A'B'C'$. Konstruisati jedan od trouglova $ABC$ koji su slični trouglu $A'B'C'$ i opisan oko trougla $A_0B_0C_0$ tako da $AB$ prolazi kroz $C_0$, $BC$ kroz $A_0$, $CA$ kroz $B_0$ i da temena $A$, $B$, $C$ odgovaraju respektivno temenima $A'$, $B'$, $C'$. Između trouglova $ABC$ izdvojiti onaj koji ima maksimalnu površinu.

5. Dat je niz $\{c_n\}$ čiji je opšti član $c_n = a_1^n + \cdots + a_8^n$, gde su $a_1, \ldots, a_8$ realni brojevi koji nisu svi jednaki nuli. Ako se zna da među članovima niza $\{c_n\}$ ima beskonačno mnogo članova jednakih nuli, naći sve one vrednosti za $n$ za koje je $c_n = 0$.

6. Na jednom sportskom takmičenju koje je trajalo $n$ $(>1)$ dana dodeljeno je $m$ medalja. Prvog dana dodeljena je 1 medalja i 1/7 preostalih $m-1$ medalja. Drugog dana dodeljene su 2 medalje i 1/7 medalja koje su posle toga preostale, itd. Poslednjeg $n$-tog dana dodeljeno je tačno $n$ medalja koje su posle svega preostale. Koliko je na tom takmičenju dodeljeno medalja i koliko je dana takmičenje trajalo?

## 3.10. DESETA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1968

Deseta olimpijada održana je u Sovjetskom Savezu od 5. do 18. jula 1968. Učestvovalo je 12 ekipa: Bugarska (B), Čehoslovačka (Č), Engleska (E), Italija (I), Jugoslavija (J), Mađarska (M), Mongolija (Mo), Nemačka Demokratska Republika (N), Poljska (P), Rumunija (R), SSSR (S) i Švedska (Š).

Svaka ekipa imala je po osam takmičara.

Pregled broja poena po zadacima kao i koja je zemlja predložila koji zadatak dat je u sledećoj tabeli:

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | R | Č | B | P | N | E | |
| Broj poena | 6 | 7 | 7 | 5 | 7 | 8 | 40 |

Sledeća tabela daje pregled osvojenih nagrada i zbir osvojenih poena po ekipama.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 40-39 poena | II nagrada 38-33 poena | III nagrada 32-26 poena |
|---|---|---|---|---|
| B | 204 | — | 3 | 1 |
| Č | 248 | 2 | 4 | — |
| E | 263 | 3 | 2 | 2 |
| I | 132 | — | — | 1 |
| J | 179 | — | — | 3 |
| M | 291 | 3 | 3 | 2 |
| Mo | 74 | — | — | — |
| N | 304 | 5 | 3 | — |
| P | 262 | 2 | 3 | 2 |
| R | 208 | 1 | 1 | 2 |
| S | 298 | 5 | 1 | 2 |
| Š | 256 | 1 | 2 | 5 |

### *Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Dokazati da postoji samo jedan trougao čije su strane uzastopni prirodni brojevi a jedan od uglova je dva puta veći od jednog od preostalih uglova. uglova.

**2.** Odrediti sve cele pozitivne brojeve $x$ čiji je proizvod cifara (u dekadnom sistemu) jednak $x^2-10x-22$.

**3.** Dat je sistem jednačina

$$
(1)\qquad \begin{aligned} ax_1^2+bx_1+c&=x_2,\\ ax_2^2+bx_2+c&=x_3,\\ &\vdots\\ ax_n^2+bx_n+c&=x_1, \end{aligned}
$$

gde su $x_1, \ldots, x_n$ nepoznate, $a$, $b$, $c$ realni brojevi i $a \neq 0$. Dokazati da sistem (1):

1° nema realnih rešenja ako je $(b-1)^2-4ac<0$, 2° ima jedinstveno realno rešenje ako je $(b-1)^2-4ac=0$, 3° ima više od jednog realnog rešenja ako je $(b-1)^2-4ac>0$.

### *Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** Dokazati da u svakom tetraedru postoji teme takvo da se od duži koje su jednake ivicama tetraedra koje polaze iz tog temena može konstruisati trougao.

**5.** Neka je $f$ realna funkcija koja je definisana za sve realne vrednosti nezavisno promenljive. Neka za svako $x$ važi jednakost

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f(x)^2} \qquad (a>0).$$

a) Dokazati da je funkcija $f$ periodična.

b) Navesti za $a=1$ primer takve funkcije $f$ (koja nije identički jednaka konstanti).

6. Neka je $[x]$ celi deo od $x$. Naći zbir

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\cdots$$

za svaki celi pozitivan broj $n$.

## 3.11. JEDANAESTA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1969

Jedanaesta međunarodna matematička olimpijapa održana je u Bukureštu (Rumunija) od 5. do 20. jula 1969. Na olimpijadi je učestvovalo 14 ekipa: Belgija (Be), Bugarska (B), Čehoslovačka (Č), Francuska (F), Holandija (H), Jugoslavija (J), Mađarska (M), Mongolija (Mo), Nemačka Demokratska Republika (N), Poljska (P), Rumunija (R), Sovjetski Savez (S), Švedska (Š) i Velika Britanija (VB). Takmičenju je prisustvovala i Austrija kao posmatrač. Svaka ekipa je imala po 8 članova. Maksimalan broj poena koji je mogao da osvoji svaki takmičar je 40. Takmičenje je održano u dva dana.

U sledećoj tabeli dat je pregled zadataka sa poenima i zemljom predlagačem.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | N | M | P | H | Mo | S |
| Broj poena | 5 | 7 | 7 | 6 | 7 | 8 |

Ova olimpijada karakteristična je po tome što je osvojen mali broj prvih nagrada (ukupno 3). Broj osvojenih nagrada i poena pojedinih ekipa vidi se iz sledeće tabele:

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 38-40 poena | II nagrada 30-37 poena | III nagrada 24-29 poena |
|---|---|---|---|---|
| Be | 57 | — | — | — |
| B | 189 | — | — | 3 |
| Č | 170 | — | — | 3 |
| F | 119 | — | 1 | — |
| H | 51 | — | — | — |
| J | 181 | — | 2 | 2 |
| M | 247 | 1 | 4 | 2 |
| Mo | 120 | — | — | 1 |
| N | 240 | — | 4 | 4 |
| P | 119 | — | 1 | — |
| R | 219 | — | 4 | 2 |
| S | 231 | 1 | 3 | 3 |
| Š | 104 | — | — | — |
| VB | 193 | 1 | 1 | 1 |

Vreme trajanja ispita je 4 sata svakog dana.

### *Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Dokazati da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva $a$ koji imaju osobinu da broj $n^4+a$ nije prost ni za jednu vrednost prirodnog broja $n$.

**2.** Funkcija $f$ je definisana pomoću

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{1}{2}\cos(a_2+x)+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x),$$

gde su $a_1, \ldots, a_n$ realne konstante i $x$ realna promenljiva.

Dokazati

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_2-x_1=m\pi \quad (m \text{ ceo broj}).$$

**3.** Odrediti potrebne i dovoljne uslove koje mora da ispunjava broj $a>0$ da bi postojao tetraedar koji ima $k$ ivica dužine $a$ i preostalih $6-k$ ivica dužine 1, pri čemu je $k=1, 2, \ldots, 5$.

### *Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** Nad duži $AB$ kao nad prečnikom konstruisan je polukrug $\gamma$. Neka je $C$ tačka na polukrugu $\gamma$ koja je različita od tačaka $A$ i $B$ i neka je $D$ njena ortogonalna projekcija na $AB$. Neka su $\gamma_1$, $\gamma_2$ i $\gamma_3$ krugovi koji dodiruju prečnik $AB$ pri čemu je $\gamma_1$ upisan u trouglu $ABC$, dok $\gamma_2$ i $\gamma_3$ dodiruju duž $CD$ i polukrug $\gamma$. Dokazati da krugovi $\gamma_1$, $\gamma_2$ i $\gamma_3$ imaju još jednu zajedničku tangentu.

**5.** U ravni je dato $n(>4)$ tačka od kojih nikoje tri ne leže na jednoj pravoj. Dokazati da postoji najmanje $\binom{n-3}{2}$ konveksnih četvorouglova čija su sva temena u datim tačkama.

**6.** Neka je

$$x_1>0, \quad x_2>0, \quad x_1y_1-z_1^2>0 \quad \text{i} \quad x_2y_2-z_2^2>0.$$

Dokazati da važi nejednakost

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}. \tag{1}$$

Odrediti potrebne i dovoljne uslove da u (1) važi znak jednakosti.

## 3.12. DVANAESTA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1970

I na ovoj olimpijadi, koja je održana u Mađarskoj od 10. do 22. jula 1970, učestvovalo je 12 zemalja sa ekipama od 8 članova. Na ovoj olimpijadi, za razliku od prethodne, nije učestvovala Belgija, ali je sada učestvovala u takmičenju ekipa Austrije (A). I na ovoj olimpijadi takmičenje je održano u dva dana sa po 3 zadatka. Rok za njihovu izradu bio je 4 sata (svakog dana), a maksimalan broj poena koji je mogao osvojiti svaki kandidat je $20+20=40$.

Pregled predlagača i broj poena pojedinih zadataka dat je u sledećoj tabeli.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | P | R | Š | Č | B | S |
| Broj poena | 5 | 7 | 8 | 6 | 6 | 8 |

Rezultati svih zemalja učesnica i broj osvojenih nagrada dati su sledećom tabelom.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 37-40 poena | II nagrada 30-36 poena | III nagrada 21-29 poena |
|---|---|---|---|---|
| A | 104 | — | — | — |
| B | 145 | — | — | 3 |
| Č | 145 | — | — | 3 |
| F | 141 | — | 1 | 2 |
| H | 87 | — | — | 1 |
| J | 209 | — | 3 | 3 |
| M | 233 | 3 | 1 | 2 |
| Mo | 78 | — | — | 1 |
| N | 221 | 1 | 2 | 4 |
| P | 105 | — | — | — |
| R | 208 | — | 3 | 4 |
| S | 221 | 2 | 1 | 3 |
| Š | 110 | — | — | 2 |
| VB | 180 | 1 | — | 4 |

### *Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Dat je trougao $ABC$ i tačka $M$ na stranici $AB$ ($M \neq A$, $M \neq B$). Neka su $r_1$, $r_2$, $r$ poluprečnici krugova upisanih u trouglove $AMC$, $BMC$, $ABC$ respektivno i neka su $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho$ poluprečnici krugova koji:

a) leže unutar ugla $ACB$,

b) predstavljaju spolja upisane krugova $AMC$, $BMC$, $ABC$ respektivno.

Dokazati da je $\frac{r_1}{\rho_1}\frac{r_2}{\rho_2}=\frac{r}{\rho}$.

**2.** Neka su $a$, $b$, $n$ prirodni brojevi. Brojevi $A_n$ odnosno $B_n$ imaju istu reprezentaciju $\overline{x_n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_1 x_0}$ u sistemima sa osnovom $a$ odnosno $b$, pri čemu je $x_n \neq 0$ i $x_{n-1} \neq 0$. Obeležimo sa $A_{n-1}$ i $B_{n-1}$ brojeve koji se dobijaju ako se prva cifra, $x_n$, odstrani.

Dokazati da je $a > b$ ako i samo ako je

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

**3.** Niz realnih brojeva $(b_n)$ $n=1, 2, \ldots$ definisan je sa

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}},$$

gde su $a_0, a_1, \ldots$ realni brojevi za koje važi

(1) $$1=a_0\leqq a_1\leqq \cdots \leqq a_n\leqq \cdots$$

a) Dokazati da je $0\leqq b_n<2$.

b) Dokazati da za dato $c\,(0\leqq c<2)$ postoji niz realnih brojeva $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sa osobinom (1) za koji je $b_n>c$ za beskonačno mnogo indeksa $n$.

*Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** Odrediti sve prirodne brojeve $n$ koji imaju sledeću osobinu: Skup

$$\{n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5\}$$

mogućno je podeliti na dva dela tako da je proizvod svih članova jednog od tih delova jednak proizvodu svih članova drugog dela.

**5.** U tetraedu $ABCD$ ivica $DB$ normalna je na ivicu $DC$ a podnožje normale spuštene iz temena $D$ na ravan trougla $ABC$ poklapa se sa ortocentrom tog trougla. Dokazati da je

$$(AB+BC+CA)^2\leqq 6\,(DA^2+DB^2+DC^2).$$

Za kakve tetraedre važi znak jednakosti?

**6.** U ravni je dato 100 tačaka od kojih nikoje tri ne leže na isto pravoj. Posmatraju se svi mogućni trouglovi sa temenima u tim tačkama. Dokazati da među njima ima ne više od 70% oštrouglih trouglova.

## 3.13. TRINAESTA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1971

U vremenu od 10. do 21. jula 1971. održana je u Čehoslovačkoj trinaesta međunarodna olimpijada mladih matematičara. Na ovoj olimpijadi je učestvovalo 15 ekipa iz: Austrije (A), Bugarske (B), Čehoslovačke (Č), Engleske (E), Francuske (F), Holandije (H), Jugoslavije (J), Kube (K), Mađarske (M), Mongolije (Mo), Nemačke Demokratske Republike (N), Poljske (P), Rumunije (R), Sovjetskog Saveza (S) i Švedske (Š).

Kao i na prethodnim olimpijadama, takmičenje je održano u dva dana sa po tri zadatka. Vreme trajanja svakog dana je bilo po 4 sata.

U sledećoj tabeli je dat pregled predlagača i broj poena za pojedine zadatke.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja pvedlagač | M | S | P | H | B | Š |
| Broj poena | 5 | 7 | 9 | 6 | 7 | 8 |

Iz prethodne tabele se vidi da je svaki kandidat mogao osvojiti najviše 42 poena za svoju ekipu, odnosno svaka ekipa je mogla osvojiti najviše 336 poena. Kako su ovom prilikom zadaci bili teži nego ranijih godina, to su i uslovi za dobijanje nagrada bili nešto bliži nego na ranijim olimpijadama. Plasman pojedinih ekipa i broj osvojenih nagrada i poena vidi se iz donje tabele.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 42-35 poena | II nagrada 34-23 poena | III nagrada 22-11 poena |
|---|---|---|---|---|
| A | 82 | — | — | 4 |
| B | 39 | — | — | — |
| Č | 55 | — | — | 1 |
| E | 110 | — | 1 | 4 |
| F | 38 | — | — | — |
| H | 48 | — | — | 2 |
| J | 71 | — | — | 2 |
| K | 9 | — | — | — |
| M | 255 | 4 | 4 | — |
| Mo | 26 | — | — | — |
| N | 142 | 1 | 1 | 4 |
| P | 118 | 1 | — | 4 |
| R | 110 | — | 1 | 4 |
| S | 205 | 1 | 5 | 2 |
| Š | 43 | — | — | 2 |

*Zadaci sa prvog dana takmičenja*

1. Dokazati da je tvrđenje: Za proizvoljne realne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ važi nejednakost

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)+\cdots$$
$$+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\geq 0$$

istinito za $n=3$ i $n=5$ i neistinito za svaki drugi prirodan broj $n>2$.

2. Dat je konveksan poliedar $P_1$ sa devet vrhova $A_1, A_2, \ldots, A_9$. Obeležimo sa $P_2, P_3, \ldots, P_9$ poliedre dobijene translacijama poliedra $P_1$ koje tačku $A_1$ prevode u tačku $A_2, A_3, \ldots, A_9$ respektivno.

Dokazati da bar dva od poliedra $P_1, P_2, \ldots, P_9$ moraju imati bar jednu zajedničku unutrašnju tačku.

3. Dokazati da niz $(2^n-3)$ $n=2, 3, \ldots$ sadrži beskonačno mnogo članova takvih da su svaka dva od njih uzajamno prosti.

*Zadaci sa drugog dana takmičenja*

4. Dat je tetraedar $ABCD$ čije su sve strane oštrougli trouglovi.

Posmatrajmo sve zatvorene poligonalne linije $XYZTX$ određene na sledeći način:

$X$ je tačka na ivici $AB$, različita od $A$ i $B$. Analogno $Y, Z, T$ su unutrašnje tačke ivica $BC, CD, DA$ respektivno.

Dokazati:

a) Ako je $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD \neq \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA$, tada među tim poligonalnim linijama nema najkraće;

b) Ako je $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA$, tada postoji beskonačno mnogo takvih poligonalnih linija sa najmanjom dužinom. Ta dužina je

$$2\,AC \sin\frac{\alpha}{2},$$

gde je $\alpha = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB$.

**5.** Dokazati da za proizvoljan prirodan broj $m$ postoji neprazan konačan skup $S$ tačaka u ravni sa sledećom osobinom: Svaka tačka iz skupa $S$ je na jediničnom rastojanju od tačno $m$ drugih tačaka iz $S$.

**6.** Posmatrajmo kvadratnu shemu nenegativnih celih brojeva

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}. \end{matrix}$$

Za ovu shemu važi: ako je $a_{ij} = 0$, tada je

$$a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj} \geqq n.$$

Dokazati da je zbir svih elemenata date sheme $\geqq \frac{1}{2} n^2$.

## 3.14. ČETRNAESTA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1972

Četrnaesta međunarodna matematička olimpijada održana je jula 1972. u Poljskoj, tačnije u gradu Torunu rodnom mestu N. Kopernika. Na ovoj olimpijadi je učestvovalo 14 ekipa, sve ekipe koje su učestvovale i na trinaestoj olimpijadi izuzev Francuske. Takmičenje je održano u dva dana: 10. i 11. jula, sa po 3 zadatka svakog dana. Zemlje predlagači i broj poena dati su u narednoj tabeli.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | S | H | E | H | B | E |
| Broj poena | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 |

Za izradu prva tri zadataka predviđeno je vreme od 4 sata, a za druga tri zadatka vreme od 4 sati i 30 minuta.

Pregled uspeha pojedinih ekipa dat je u narednoj tabeli.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 40 poena | II nagrada 39-30 poena | III nagrada 29-19 poena |
|---|---|---|---|---|
| A | 136 | — | — | 5 |
| B | 120 | — | — | 2 |
| Č | 130 | — | — | 4 |
| E | 179 | — | 2 | 4 |
| H | 51 | — | — | — |
| J | 136 | — | — | 3 |
| K | 14 | — | — | — |
| M | 263 | 3 | 3 | 2 |
| Mo | 49 | — | — | — |
| N | 239 | 1 | 3 | 4 |
| P | 160 | 1 | 1 | 1 |
| R | 206 | 1 | 3 | 1 |
| S | 270 | 2 | 4 | 2 |
| Š | 60 | — | — | 2 |

### *Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Dat je skup koji se sastoji od 10 različitih dvocifrenih prirodnih brojeva. Dokazati da postoje dva neprazna disjunktna podskupa tog skupa takva da je zbir elemenata u jednom od tih podskupova jednak zbiru elemenata u drugom podskupu.

**2.** Proizvoljan tetivni četvorougao može se razložiti na $n$ tetivnih četvorouglova. Dokazati da je ovo tvrđenje tačno za $n \geqq 4$.

**3.** Neka su $m$ i $n$ nenegativni celi brojevi. Dokazati da je $\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$ ceo broj $(0! = 1)$.

### *Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** Rešiti sistem nejednačina

$$(x_1^2 - x_3 x_5)(x_2^2 - x_3 x_5) \leqq 0,$$

$$(x_2^2 - x_4 x_1)(x_3^2 - x_4 x_1) \leqq 0,$$

$$(x_3^2 - x_5 x_2)(x_4^2 - x_5 x_2) \leqq 0,$$

$$(x_4^2 - x_1 x_3)(x_5^2 - x_1 x_3) \leqq 0,$$

$$(x_5^2 - x_2 x_4)(x_1^2 - x_2 x_4) \leqq 0,$$

ako se zna da su $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, pozitivni realni brojevi.

**5.** Neka su $f$ i $g$ realne funkcije, definisane u intervalu $(-\infty, +\infty)$ koje za svako $x$, $y$ zadovoljavaju jednačinu

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,g(y).$$

Ako $f$ nije identički jednako nuli i ako je $|f(x)| \leq 1$ za svako $x$, dokazati da je tada i $|g(y)| \leq 1$ za svako $y$.

6. Date su četiri različite paralelne ravni. Dokazati da postoji pravilan tetraedar koji ima po jedno teme u svakoj od tih ravni.

## 3.15. PETNAESTA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1973

Petnaesta međunarodna matematička olimpijada održana je od 5. do 16. jula 1973, po treći put od kada se ova takmičenja organizuju, u Moskvi. Na njoj je učestvovalo 16 ekipa: Austrija (A), Bugarska (B), Čehoslovačka (Č), Engleska (E), Finska (Fi), Francuska (F), Holandija (H), Jugoslavija (J), Kuba (K), Mađarska (M), Mongolija (Mo), Nemačka Demokratska Republika (N), Poljska (P), Rumunija (R), Sovjetski Savez (S), Švedska (Š).

Svaka ekipa imala je po 8 članova osim Kube koja je imala 5 članova.

Takmičenje je održano u dva dana (9. i 10. jula) sa po tri zadatka svakog dana. Vreme za izradu datih zadataka bilo je po 4 sata svakog dana.

U sledećoj tabeli dat je pregled zemalja predlagača i broj poena za svaki zadatak.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | Č | P | Š | J | P | Š |
| Broj poena | 6 | 6 | 8 | 6 | 6 | 8 |

Iz ove tabele se vidi da je svaki učesnik mogao osvojiti najviše 40, a svaka ekipa 320 poena (sem Kube).

U narednoj tabeli dat je pregled uspeha pojedinih ekipa (broj osvojenih poena i nagrada).

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 35-40 poena | II nagrada 27-34 poena | III nagrada 17-26 poena |
|---|---|---|---|---|
| A | 144 | — | — | 6 |
| B | 96 | — | — | 1 |
| Č | 149 | — | 1 | 4 |
| E | 164 | 1 | — | 5 |
| Fi | 86 | — | — | 2 |
| F | 153 | — | 3 | 1 |
| H | 96 | — | — | 2 |
| J | 137 | — | — | 5 |
| K | 42 | — | — | 1 |
| M | 215 | 1 | 2 | 5 |
| Mo | 65 | — | — | 1 |
| N | 188 | — | 3 | 4 |
| P | 174 | — | 2 | 4 |
| R | 141 | — | 1 | 3 |
| S | 254 | 3 | 2 | 3 |
| Š | 99 | — | 1 | 1 |

### *Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Neka tačka $O$ leži na pravoj $l$ i neka su $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$ jednačini vektori, pri čemu prava $l$ i tačke $P_1, P_2, \ldots, P_n$ leže u jednoj ravni tako da se sve tačke $P_i$ $(i=1, \ldots, n)$ nalaze sa iste strane prave $l$.

Ako je $n$ neparan broj, dokazati da je

$$|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_n}|\geq 1$$

($|\overrightarrow{OM}|$ označava intenzitet vektora $\overrightarrow{OM}$).

**2.** Utvrditi da li u prostoru postoji konačan skup $M$ tačaka koje ne leže u jednoj ravni, takav da za svake dve tačke $A, B \in M$ postoje druge dve tačke $C, D \in M$ takve da su prave $AB$ i $CD$ paralelne ali se ne poklapaju.

**3.** Odrediti minimalnu vrednost izraza $a^2+b^2$, ako su $a$ i $b$ realni brojevi za koje jednačina $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ ima bar jedan realan koren.

### *Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** Vojnik mora da ispita da li u oblasti, koja ima oblik jednakostraničnog trougla (uključujući i granicu), ima mina. Radijus dejstva njegovog detektora jednak je polovini visine trougla. Vojnik polazi iz jednog temena trougla. Kakvu putanju mora izabrati da bi pri ispitivanju prešao najkraći mogućni put i ispitao celu oblast?

**5.** Neprazan skup $G$ funkcija realne promenljive $x$, oblika $ax+b$, gde su $a$ i $b$ realni brojevi i $a\neq 0$, zadovoljava uslove:

a) Ako su $f, g \in G$, tada je $g\circ f \in G$, gde je $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.

b) Ako je $f\in G$, $f(x)=ax+b$, tada je inverzna funkcija

$$f^{-1}\in G \quad \text{i} \quad f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}.$$

c) Za svako $f\in G$ postoji broj $x_f\in \mathbf{R}$ takav da je $f(x_f)=x_f$.

Dokazati da postoji broj $k\in \mathbf{R}$ takav da je $f(k)=k$ za svako $f\in G$.

**6.** Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dati pozitivni brojevi i neka je $q$ $(0<q<1)$ dati realan broj. Naći $n$ realnih brojeva $b_1, b_2, \ldots, b_n$ za koje važi:

a) $a_k<b_k$ $(k=1, \ldots, n)$;

b) $q<\dfrac{b_{k+1}}{b_k}<\dfrac{1}{q}$ $(k=1, \ldots, n-1)$;

c) $b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{1+q}{1-q}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

### 3.16. ŠESNAESTA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1974

Od 4. do 16. jula 1974. održana je u DR Nemačkoj Šesnaesta međunarodna matematička olimpijada. Na ovoj Olimpijadi je učestvovalo 18 ekipa: Austrije (A), Bugarske (B), Čehoslovačke (Č), Engleske (E), Finske (Fi), Francuske (F), Holandije (H), Jugoslavije (J), Kube (K), Mađarske (M), Mongolije (Mo), Nemačke Demokratske Republike (N), Poljske (P), Rumunije (R), Sovjetskog Saveza (S), SAD, Švedske (Š) i Vijetnama (V).

Na ovoj olimpijadi prvi put su učestvovale ekipe iz SAD i Vijetnama. Sve ekipe su imale po 8 članova sem Kube, koja je imala 7 i Vijetnama koji je imao 5 članova.

Kao i ranijih godina i ova Olimpijada održana je u dva dana (8. i 9. jula) sa po tri zadatka.

U sledećoj tabeli dat je pregled zadataka sa poenima i zemljom predlagačem.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | SAD | Fi | R | B | H | Š |
| Broj poena | 5 | 6 | 8 | 6 | 7 | 8 |

Plasman pojedinih ekipa, broj osvojenih poena i nagrada vidi se iz sledeće tabele.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 40—38 poena | II nagrada 37—30 poena | III nagrada 29—23 poena |
|---|---|---|---|---|
| A | 212 | 1 | 1 | 4 |
| B | 171 | — | 1 | 4 |
| Č | 158 | — | — | 2 |
| E | 188 | — | 1 | 3 |
| Fi | 111 | — | — | 1 |
| F | 194 | 1 | 1 | 3 |
| H | 112 | — | — | 1 |
| J | 216 | 2 | 1 | 2 |
| K | 65 | — | — | — |
| M | 237 | 1 | 3 | 3 |
| Mo | 60 | — | — | — |
| N | 236 | — | 5 | 2 |
| P | 138 | — | — | 2 |
| R | 199 | 1 | 1 | 3 |
| S | 256 | 2 | 3 | 2 |
| SAD | 243 | — | 5 | 3 |
| Š | 187 | 1 | 1 | — |
| V | 146 | 1 | 1 | 2 |

*Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Date su tri karte i na svakoj od njih napisan je po jedan ceo broj. Ta tri broja $p$, $q$ i $r$ zadovoljavaju uslov $0<p<q<r$. Tri igrača $A$, $B$ i $C$, igraju igru čiji se jedan krug sastoji u sledećem: karte se promešaju i podele tako da svaki igrač dobija onoliko kuglica koliki je broj napisan na njegovoj karti, zatim se karte vraćaju, dok već dobijene kuglice ostaju kod igrača.

Igra ima $n$ krugova, $n \geqq 2$. Na kraju igre igrač $A$ je ukupno imao 20 kuglica, $B$—10 kuglica i $C$—9 kuglica.

Poznato je da je u poslednjem krugu igrač $B$ dobio $r$ kuglica. Koji je od igrača dobio $q$ kuglica u prvom krugu?

**2.** Dat je trougao $ABC$. Dokazati da nejednakost $\sin A \cdot \sin B \leqq \sin^2 C/2$ važi ako i samo ako na stranici $AB$ postoji tačka $D$ takva da je duž $CD$ geometrijska sredina duži $AD$ i $BD$.

**3.** Neka je $n$ proizvoljan prirodan broj. Dokazati da broj $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$ nije deljiv sa 5.

### *Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** Posmatrajmo razlaganje šahovske table $8 \times 8$ na $p$ pravougaonika, koji nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka, pri čemu ta razlaganja zadovoljavaju sledeće uslove:

a) Svaki se pravougaonik sastoji od izvesnog broja polja i pri tome ima jednak broj crnih i belih polja;

b) Ako je $a_i$ broj belih polja u $i$-tom pravougaoniku, tada je

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_i < \cdots < a_p.$$

Odrediti maksimalnu vrednost broja $p$ za koju je takvo razlaganje mogućno. Za ovu vrednost $p$ odrediti sve mogućne konačne nizove takvih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

**5.** Neka su $a$, $b$, $c$, $d$ proizvoljni pozitivni realni brojevi. Odrediti skup svih mogućnih vrednosti izraza

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}.$$

**6.** Neka je $P$ polinom za celim koeficijentima, različit od konstante. Obeležimo sa $n(P)$ broj svih različitih celih brojeva $k$ za koje je $(P(k))^2 = 1$.

Dokazati da je $n(P) - \deg(P) \leqq 2$, gde je sa $\deg(P)$ obeležen stepen polinoma $p$.

## 3.17. SEDAMNAESTA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1975

Ova Olimpijada održana je u Bugarskoj od 3. do 16. jula. Učestvovalo je 17 zemalja: Austrija (A), Bugarska (B), Čehoslovačka (Č), Engleska (E), Francuska (F), Grčka (G), Holandija (H), Jugoslavija (J), Mađarska (M), Mongolija (Mo), Demokratska Republika Nemačka (N), Poljska (P), Rumunija (R), Sovjetski Savez (S), SAD, Švedska (Š), DR Vijetnam (V).

Ekipa Švedske drugog dana i ekipa Vijetnama oba dana imale su po 7 takmičara, dok su sve ostale ekipe imale po 8 takmičara.

Na ovoj Olimpijadi prvi put je učestvovala i ekipa Grčke.

Po već ustaljenom običaju, zadano je 6 zadataka koji su rešavani u dva dana. Predlagači tih zadataka i broj poena prikazani su u donjoj tabeli.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | Č | E | H | S | S | E |
| Broj poena | 6 | 7 | 7 | 6 | 6 | 8 |

Uspesi ekipa prikazani su u sledećoj tabeli.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 40—38 poena | II nagrada 37—31 poena | III nagrada 30—23 poena |
|---|---|---|---|---|
| A | 192 | 1 | 1 | 2 |
| B | 186 | — | 1 | 4 |
| Č | 162 | — | — | 2 |
| E | 239 | 2 | 2 | 3 |
| F | 176 | 1 | 1 | 1 |
| G | 95 | — | 1 | — |
| H | 67 | — | — | 1 |
| J | 163 | — | 1 | 1 |
| M | 258 | — | 5 | 3 |
| Mo | 75 | — | — | 1 |
| N | 249 | — | 4 | 4 |
| P | 124 | — | 1 | 1 |
| R | 180 | — | 1 | 3 |
| S | 246 | 1 | 3 | 4 |
| SAD | 247 | 3 | 1 | 3 |
| Š | 160 | — | 2 | — |
| V | 175 | — | 1 | 3 |

### *Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Neka su $x_i$, $y_i$ $(i=1, 2, \dots, n)$ realni brojevi, takvi da je

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n, \quad y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$$

i neka je $z_1, z_2, \dots, z_n$ proizvoljna permutacija brojeva $y_1, y_2, \dots, y_n$. Dokazati da je

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2.$$

**2.** Neka je $a_1, a_2, a_3, \dots$ strogo rastući niz prirodnih brojeva. Dokazati da postoji beskonačno mnogo članova $a_m$ tog niza koji se mogu predstaviti u obliku

$$a_m = xa_p + ya_q,$$

gde su $x$ i $y$ prirodni brojevi i $p \neq q$.

**3.** Nad stranicama proizvoljnog trougla $ABC$ spolja su konstruisani trouglovi $BPC$, $CQA$ i $ARB$, takvi da je $\sphericalangle PBC = \sphericalangle CAQ = 45°$, $\sphericalangle BCP = \sphericalangle QCA = 30°$, $\sphericalangle ABR = \sphericalangle RAB = 15°$. Dokazati da je $\sphericalangle QRP = 90°$ i $PR = QR$.

*Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** Neka je $A$ zbir cifara broja $4444^{4444}$ i $B$ zbir cifara broja $A$. Naći zbir cifara broja $B$. (Svi brojevi su zapisani u dekadnom sistemu.)

**5.** Može li se na krugu poluprečnika 1 odrediti 1975 tačaka, takvih da je rastojanje između svake dve od njih racionalan broj?

**6.** Naći sve homogene polinome $P(x, y)$ stepena $n$ dveju promenljivih koji zadovoljavaju sledeće uslove:

a) Za svaka tri realna broja $a$, $b$, $c$ važi

$$P(a+b, c) + P(b+c, a) + P(c+a, b) = 0;$$

b) $P(1, 0) = 1$.

PRIMEDBA. Polinom $P$ je homogen stepena $n$ ako za svaka tri realna broja $t$, $x$, $y$ važi $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$, gde je $n$ prirodan broj.

## 3.18. OSAMNAESTA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1976

Osamnaesta po redu Matematička olimpijada održana je u vremenu od 10. do 20. jula u Austriji. Učestvovale su ekipe iz 18 zemalja, i to: Austrija (A), Bugarska (B), Čehoslovačka (Č), Finska (Fi), Francuska (F), Grčka (G), Holandija (H), Jugoslavija (J), Kuba (K) (imala je samo tri takmičara), Mađarska (M), DR Nemačka (N), Poljska (P), Rumunija (R), SAD, Sovjetski savez (S), Engleska (E) i Vijetnam (V).

Samo takmičenje (rešavanje zadataka) održano je 12. i 13. jula.

*Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Površina ravnog konveksnog četvorougla je $32\,\text{cm}^2$, a zbir dužina dveju njegovih naspramnih stranica i jedne dijagonale jednak je 16 cm. Odrediti sve vrednosti koje može imati dužina druge dijagonale.

**2.** Neka je $P_1(x) = x^2 - 2$ i $P_k(x) = P_1(P_{k-1}(x))$ za $k = 2, 3, \ldots$

Dokazati da za svaki prirodan broj $n$, jednačina $P_n(x) = x$ ima sve korene realne i različite.

**3.** Pravougaona kutija je takva da se može potpuno ispuniti jediničnim kockama. Ako se u nju stavljaju kocke zapremine 2 čije su ivice paralelne ivicama kutije, maksimalan mogući broj tih kocki popunjava tačno 40% zapremine kutije. Odrediti (unutrašnje) dimenzije svih kutija sa tim svojstvima.

PRIMEDBA. $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599\ldots$

*Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** Naći najveći broj koji je proizvod prirodnih brojeva i čiji je zbir 1976. (Rešenje obrazložiti.)

**5.** Dat je sistem od $p$ jednačina sa $q=2p$ nepoznatih

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1q}x_q=0,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2q}x_q=0,$$
$$\vdots$$
$$a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pq}x_q=0$$

u kome je $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$ $(i=1,2,\ldots,p;\ j=1,2,\ldots,q)$.

Dokazati da postoji rešenje $(x_1, x_2,\ldots, x_q)$ tog sistema, takvo da važi:

a) Svi $x_j$ $(j=1, 2,\ldots, q)$ su celi brojevi;

b) Bar za jedno $j$ $(1\leqq j\leqq q)$, $x_j\neq 0$;

c) Za svako $j=1, 2,\ldots, q$ je $|x_j|\leqq q$.

**6.** Niz $a_0$, $a_1$, $a_2,\ldots$ definisan je na sledeći način:

$$a_0=2;\ a_1=2{,}5;\ a_{n+1}=a_n(a_{n-1}^2-2)-a_1\quad (n=1,\ 2,\ldots).$$

Dokazati da, za $n=1,\ 2,\ldots$, važi

$$[a_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$$

($[x]$ označava najveći ceo broj koji nije veći od $x$.)

Iz naredne dve tabele vidi se ko su predlagači ovih zadataka kao i uspeh pojedinih ekipa.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | Č | Fi | H | SAD | H | E |
| Broj poena | 5 | 7 | 8 | 6 | 7 | 7 |

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 40—38 poena | II nagrada 37—30 poena | III nagrada 29—23 poena |
|---|---|---|---|---|
| A | 167 | 1 | 2 | 5 |
| B | 174 | — | 2 | 6 |
| Č | 116 | — | 1 | 3 |
| E | 214 | 2 | 4 | 1 |
| Fi | 52 | — | — | 1 |
| F | 165 | 1 | 3 | 1 |
| G | 50 | — | — | — |
| H | 78 | — | — | 1 |
| J | 116 | — | 1 | 3 |
| K | 18 | — | — | — |
| M | 160 | — | 3 | 4 |
| N | 142 | — | 2 | 3 |
| P | 138 | — | — | 6 |
| R | 118 | — | 1 | 3 |
| S | 250 | 4 | 3 | 1 |
| SAD | 188 | 1 | 4 | 1 |
| Š | 120 | — | 1 | 3 |
| V | 112 | — | 1 | 3 |

## 3.19. DEVETNAESTA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1977

Olimpijada je održana od 6. do 10. jula 1977. godine u Beogradu. Na Olimpijadi je učestvovala 21 ekipa: Alžir (Al), Austrija (A), Belgija (Be), Bugarska (B), Čehoslovačka (Č), Engleska (E), Finska (Fi), Francuska (F), Holandija (H), Italija (I), Jugoslavija (J), Kuba (K), Mađarska (M), Mongolija (Mo), Nemačka Demokratska Republika (N), Poljska (P), Rumunija (R), Savezna Republika Nemačka (SRN), SAD, Sovjetski Savez (S) i Švedska (Š).

Pored toga, ekipa Demokratske Republike Vijetnama (V) nije doputovala, ali je poslala svoje zadatke od kojih je jedan prihvaćen. Ekipa Alžira je prva afrička zemlja koja se pojavljuje na međunarodnim olimpijadama.

Sve ekipe su imale po 8 takmičara, osim Kube (4 takmičara), Alžira (3), Belgije (7) i Italije (5). Takmičenje je održano u dva dana, 6. i 7. jula. Svakog dana rešavana su po 3 zadatka i to za 4 sata.

Pregled zemalja predlagača i broj poena za svaki zadatak dat je u sledećoj tabeli:

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | H | V | H | E | SRN | B |
| Broj poena | 6 | 6 | 7 | 6 | 7 | 8 |

Uspeh pojedinih ekipa dat je u sledećoj tabeli:

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 34—40 poena | II nagrada 24—33 poena | III nagrada 17—23 poena | Specijalna nagrada |
|---|---|---|---|---|---|
| Al | 17 | — | — | — | — |
| A | 151 | 1 | 1 | 2 | — |
| Be | 33 | — | — | — | — |
| B | 172 | — | 3 | 3 | 1 |
| Č | 161 | — | 3 | 2 | 1 |
| E | 190 | 1 | 3 | 3 | 2 |
| Fi | 88 | — | — | 1 | — |
| F | 126 | 1 | — | — | — |
| H | 185 | 1 | 2 | 3 | — |
| I | 22 | — | — | — | — |
| J | 159 | — | 3 | 3 | — |
| K | 41 | — | — | — | — |
| M | 190 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| Mo | 49 | — | — | — | — |
| N | 163 | 2 | 1 | 1 | — |
| P | 157 | 1 | 2 | 2 | — |
| R | 122 | — | 1 | 2 | — |
| SRN | 165 | 1 | 1 | 4 | — |
| SAD | 202 | 2 | 3 | 1 | — |
| S | 192 | 1 | 2 | 4 | 1 |
| Š | 137 | 1 | 1 | 2 | — |

Specijalna nagrada je dodeljena za originalna rešenja zadataka.

Kao što se vidi, prvo mesto osvojila je ekipa SAD, drugo ekipa Sovjetskog Saveza, a treće i četvrto ekipe Engleske i Mađarske.

*Zadaci sa prvog dana takmičenja*

1. Unutar datog kvadrata $ABCD$ konstruisani su jednakostranični trouglovi $ABK$, $BCL$, $CDM$, $DAN$. Dokazati da su središta odsečaka $KL$, $LM$, $MN$, $NK$ i središta odsečaka $AK$, $BK$, $BL$, $CL$, $CM$, $DM$, $DN$, $AN$ temena pravilnog dvanaestougla.

2. U konačnom nizu realnih brojeva suma proizvoljnih sedam uzastopnih članova je negativna, a suma proizvoljnih jedanaest uzastopnih članova je pozitivna. Odrediti najveći mogućni broj članova takvog niza.

3. Dat je prirodan broj $n$ veći od 2. Neki je $V_n$ skup brojeva oblika $1+kn$, gde je $k=1, 2, \ldots$ Za broj $m \in V_n$ kažemo da je nerazloživ u $V_n$ ako ne postoje brojevi $p, q \in V_n$, takvi da je $m=pq$.

Dokazati da postoji broj $r \in V_n$ koji se na više od jednog načina može predstaviti kao proizvod čiji su faktori nerazloživi u $V_n$.

(Predstavljanja koja se razlikuju samo poretkom faktora iz $V_n$ smatraju se istim.)

*Zadaci sa drugog dana takmičenja*

4. Neka su $a$, $b$, $A$, $B$ dati realni brojevi. Posmatrajmo funkciju

$$f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x.$$

Ako je $f(x)\geqq 0$ za svako realno $x$, dokazati da je $a^2+b^2\leqq 2$ i $A^2+B^2\leqq 1$.

5. Neka su $a$ i $b$ pozitivni celi brojevi. Pri deljenju $a^2+b^2$ sa $a+b$ dobija se količnik $q$ i ostatak $r$. Naći sve parove $(a, b)$ za koje je $q^2+r=1977$.

6. Neka je $f$ funkcija definisana za svaki pozitivan ceo broj čije su vrednosti takođe pozitivni celi brojevi. Ako za svako $n$ važi nejednakost $f(n+1)>f(f(n))$, dokazati da je $f(n)=n$ za svako $n$.

## 3.20. DVADESETA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1978

Olimpijada je održana od 1. do 13. jula u Bukureštu. Učestvovale su ekipe 17 zemalja: Austrija (A), Bugarska (B), Čehoslovačka (Č), Engleska (E), Finska (Fi), Francuska (F), Holandija (H), Jugoslavija (J), Kuba (K), Mongolija (Mo), Poljska (P), Rumunija (R), SAD, SR Nemačka (SRN), Švedska (Š), Turska (T), Vijetnam (V).

Pregled poena i zemlje predlagači zadataka dat je u sledećoj tabeli:

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | K | SAD | E | SAD | F | H |
| Broj poena | 6 | 7 | 8 | 5 | 6 | 8 |

Na ovoj olimpijadi pored I, II i III nagrade dodeljene su 4 specijalne nagrade za originalna rešenja zadataka.

Pregled uspeha pojedinih ekipa dat je u tabeli.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada | II nagrada | III nagrada | Specijalna nagrada |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 174 | — | 3 | 2 | — |
| B | 182 | — | 1 | 3 | — |
| Č | 195 | — | 2 | 3 | — |
| E | 201 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| Fi | 118 | — | — | 2 | 1 |
| F | 179 | — | 2 | 4 | — |
| H | 157 | — | 1 | 1 | 2 |
| J | 171 | — | 1 | 2 | — |
| K | 68 | — | — | 2 | — |
| Mo | 61 | — | — | — | — |
| P | 156 | — | — | 2 | — |
| R | 237 | 2 | 3 | 2 | — |
| SAD | 225 | 1 | 3 | 3 | — |
| SRN | 184 | 1 | — | 3 | — |
| Š | 117 | — | — | 1 | — |
| T | 66 | — | — | — | — |
| V | 200 | — | 2 | 6 | — |

*Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Neka su $m$ i $n$ prirodni brojevi takvi da je $n>m\geqq 1$. Poslednje tri cifre broja $1978^m$ jednake su redom poslednjim trima ciframa broja $1978^n$ (brojevi su napisani u dekadnom sistemu). Odrediti $m$ i $n$ tako da $m+n$ ima najmanju mogućnu vrednost.

**2.** Neka je $P$ data tačka unutar date sfere. $A$, $B$, $C$ su tri proizvoljne tačke na toj sferi takve da su $PA$, $PB$, $PC$ uzajamno normalne.

Neka je $Q$ teme, dijagonalno suprotno od $P$, paralelepipeda određenog sa $PA$, $PB$ i $PC$. Odrediti geometrijsko mesto tačaka $Q$ za sve mogućne položaje tačaka $A$, $B$ i $C$.

**3.** Skup svih pozitivnih celih brojeva predstavljen je u obliku unije dva svoja disjunktna podskupa:

$$\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}, \{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots,\},$$

gde je

$$f(1) < f(2) < \cdots < f(n) < \cdots, \quad g(1) < g(2) < \cdots < g(n) < \cdots$$

i $g(n) = f(f(n))+1$ za svako $n \geqq 1$. Odrediti $f(240)$.

*Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** Neka je $ABC$ trougao u kome je $AB=AC$. Krug koji iznutra dodiruje opisani krug trougla $ABC$, dodiruje i stranice $AB$ i $AC$ u tačkama $P$ i $Q$. Dokazati da je središte duži $PQ$ centar upisanog kruga trougla $ABC$.

**5.** Neka je $(a_k)$, $k=1, 2, \ldots$, niz različitih pozitivnih celih brojeva. Dokazati da za svako $n$ važi nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

**6.** Međunarodno društvo čine članovi iz 6 različitih zemalja. Spisak članova društva sastoji se od 1978 imena numerisanih brojevima 1, 2, ..., 1978. Dokazati da postoji bar jedan član društva čiji je broj jednak zbiru brojeva dvaju članova iz njegove zemlje ili je jednak dvostrukom broju nekog člana društva iz njegove zemlje.

## 3.21. DVADESET PRVA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1979

Olimpijada je održana od 1. do 7. jula 1979. godine u Londonu. Na ovoj do sada najmasovnijoj olimpijadi učestvovale su ekipe iz 23 zemlje svih kontinenata, osim Australije: Austrija (A), Belgija (Be), Brazil (Br), Bugarska (B), Čehoslovačka (Č), Demokratska Republika Nemačka (DRN), Engleska (E), Finska (Fi), Francuska (F), Grčka (G), Holandija (H), Izrael (Iz), Jugoslavija (J), Kuba (K), Luksemburg (L), Mađarska (M), Poljska (P), Rumunija (R), SAD, Savezna Republika Nemačka (SRN), Sovjetski Savez (S), Švedska (Š), Vijetnam (V).

Na ovoj Olimpijadi prvi put su učestvovale ekipe Brazila i Izraela.

Zemlja predlagač i broj poena za zadatke zadate na ovoj Olimpijadi dati su u sledećoj tabeli.

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | SRN | B | S | SAD | Iz | SRN |
| Broj poena | 6 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 |

Iz sledeće tabele vidi se uspeh pojedinih ekipa.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 40—37 poena | II nagrada 36—29 poena | III nagrada 28—20 |
|---|---|---|---|---|
| A | 152 | — | — | 4 |
| Be | 66 | — | — | 1 |
| Br | 19 | — | — | — |
| B | 150 | — | — | 5 |
| Č | 178 | 1 | — | 4 |
| DRN | 180 | — | 2 | 2 |
| E | 218 | — | 4 | 4 |
| Fi | 89 | — | — | 1 |
| F | 155 | 1 | — | 1 |
| G | 57 | — | — | 1 |
| H | 130 | — | 1 | 1 |
| Iz | 119 | — | — | 2 |
| J | 172 | — | 1 | 4 |
| K | 35 | — | — | — |
| L | 7 | — | — | — |
| M | 176 | — | 2 | 2 |
| P | 160 | — | 2 | 3 |
| R | 240 | 1 | 4 | 2 |
| SAD | 199 | 1 | 2 | 2 |
| SRN | 235 | 1 | 5 | 1 |
| S | 267 | 2 | 4 | 1 |
| Š | 143 | — | 2 | 1 |
| V | 134 | 1 | 3 | — |

Ekipa Vijetnama imala je samo 4 člana. Jedan njen član posebno je nagrađen za orginalno rešenje trećeg zadatka.

*Zadaci sa prvog dana takmičenja*

1. Neka su $p$ i $q$ prirodni brojevi takvi da je

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Dokazati da je broj $p$ deljiv brojem 1979.

2. Data je petougaona prizma sa osnovama $A_1A_2A_3A_4A_5$ i $B_1B_2B_3B_4B_5$. Sve ivice osnova i sve duži $A_iB_j$ $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$ obojene su crvenom ili zelenom bojom tako da u svakom trouglu koga obrazuju temena prizme i čije su sve stranice obojene, postoje dve stranice obojene raznim bojama, tj. ne postoji jednobojni trougao. Dokazati da su svih deset ivica osnova obojene istom bojom.

3. U ravni su data dva kruga $C_1$ i $C_2$ koji se seku. Neka je $A$ jedna njihova presečna tačka. Iz tačke $A$ počinju istovremeno da se kreću tačke $M_1$ i $M_2$ po krugovima $C_1$ i $C_2$. Tačke se kreću po svojim krugovima konstantnim brzinama ne menjajući smer. Tačke $M_1$ i $M_2$ istovremeno obiđu svaka svoj krug i sreću se u tački $A$. Dokazati da u ravni postoji nepokretna tačka $P$ koja je u svakom trenutku podjednako udaljena od tačaka $M_1$ i $M_2$.

*Zadaci sa drugog dana takmičenja*

4. Data je ravan $\pi$, tačka $P$ koja pripada toj ravni i tačka $Q$ izvan ravni $\pi$. Odrediti sve tačke $R$ u ravni $\pi$ za koje je odnos $(QP+PR)/QR$ maksimalan.

5. Odrediti sve realne brojeve $a$ za koje postoje nenegativni brojevi $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ koji zadovoljavaju sledeće jednakosti:

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3.$$

6. Neka su $A$ i $E$ dva naspramna temena pravilnog osmougla. Na temenu $A$ nalazi se žaba. Sa svakog temena osmougla, osim temena $E$, žaba može skočiti na susedno teme. Kada stigne na teme $E$, žaba ostane na njemu. Neka je $a_n$ broj načina na koje žaba može sa temena $A$ dospeti na teme $E$ skočivši tačno $n$ puta.

Dokazati da je

$$a_{2n-1} = 0, \qquad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1}), \quad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots,$$

gde je $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 2 - \sqrt{2}$.

PRIMEDBA. Pod načinom na koji žaba može dospeti sa temena $A$ na teme $E$ skočivši tačno $n$ puta, podrazumeva se niz temena $(P_0, \ldots, P_n)$ koji zadovoljava sledeće uslove:

1° $P_0=A$, $P_n=E$;

2° za svako $i$ za koje je $0 \leq i \leq n-1$, važi $P_i \neq E$;

3° za svako $i$ za koje je $0 \leq i \leq n-1$, tačke $P_i$ i $P_{i+1}$ su susedna temena osmougla.

## 3.22. MEĐUNARODNA MATEMATIČKA TAKMIČENJA U 1980

Od osnivanja 1959. godine, prvi put ove godine nije održana Matematička olimpijada. Međutim, u Evropi su održana dva međunarodna matematička takmičenja srednjoškolaca, i to: 1. i 2. jula u Mariehaminu na Alandskim ostrvima u Finskoj i 9. i 10. jula u Meršu u Luksemburgu.

### *Takmičenje u Finskoj*

Učestvovale su ekipe Velike Britanije, Mađarske Finske i Švedske. Rezultati su bili dosta skromni. Najuspešniji kandidat je imao 28 poena od 40 mogućnih, a 15 kandidata od ukupna 32 imali su više od 10 poena. Propozicije takmičenja su bile iste kao na Olimpijadama. Takmičari su u dva dana rešavali po 3 zadatka, a imali su za izradu po 4 sata. Dati su sledeći zadaci:

#### *Prvi dan*

**1.** U trouglu $ABC$ simetrale stranica $AB$ i $AC$ seku pravu $BC$ redom u tačkama $X$ i $Y$. Da bi bilo $\overline{BC}=\overline{XY}$, dovoljno je da je $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C=3$. Dokazati ovo tvrđenje, a zatim naći potrebne i dovoljne uslove da bi važilo $\overline{BC}=\overline{XY}$. (6 poena)

**2.** Niz $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definisan je pomoću $a_0=\frac{1}{2}$, $a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2$. Dokazati da je

$$1-\frac{1}{n}<a_n<1. \text{ (7 poena)}$$

**3.** Posmatrajmo jednačinu $x^n+1=y^{n+1}$, gde je $n$ prirodni broj veći od 1. Dokazati da ne postoje prirodni brojevi $x$ i $y$ koji zadovoljavaju datu jednačinu, takvi da su $x$ i $n+1$ uzajamno prosti brojevi. (7 poena)

#### *Drugi dan*

**4.** Konveksni $2n$-tougaonik upisan je u krug. Zna se da su $n-1$ pari naspramnih stranica mnogougaonika paralelne. Za koje vrednosti $n$ su i ostale dve stranice takođe paralelne? (6 poena)

**5.** Horizontalna prava naziva se trougaonom za krivu zadatu jednačinom $y=x^4+px^3+qx^2+rx+s$, ako je ona seče u četiri različite tačke $A$, $B$, $C$ i $D$ (u tom poretku) takvim da se dužima $AB$, $AC$ i $AD$ može konstruisati trougao.

Dokazati sledeće tvrđenje: ili su sve horizontalne prave koje seku datu krivu u četiri različite tačke trougaone ili ni jedna prava nije trougaona. (7 poena)

**6.** Ako se broj $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$ napiše kao decimalni broj, odrediti prvu cifru pre decimalne zapete i prvu cifru posle decimalne zapete. (7 poena).

### *Takmičenje u Luksemburgu*

Učestvovale su ekipe Belgije (Be), Francuske (F), Holandije (H), Jugoslavije (J), Luksemburga (L) i Velike Britanije (VB). Francuska ekipa je sa svoja 4 takmičara učestvovala van konkurencije. Luksemburg je imao 5 takmičara, Jugoslavija 7, a ostale ekipe po 8.

Predlagači zadataka, broj poena, kao i pregled uspeha dat je u sledećim tabelama:

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | VB | L | J | B | H | H |
| Broj poena | 6 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 |

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 36—40 | II nagrada 30—35 | III nagrada 22—29 poena |
|---|---|---|---|---|
| Be | 102 | — | — | 1 |
| H | 172 | 1 | 1 | 1 |
| J | 202 | — | 3 | 4 |
| L | 53 | — | — | 1 |
| VB | 208 | — | 3 | 4 |

### *Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Odrediti sve funkcije $f$: $\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$ koje zadovoljavaju sledeća dva uslova:

$$1^\circ\ f(1)=2; \qquad 2^\circ\ f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1,$$

za sve $x, y\in\mathbf{Q}$, gde je $\mathbf{Q}$ skup racionalnih brojeva.

**2.** Na duži $AC$ izabrana je tačka $B$. Sa iste strane prave $AC$ konstruisana su tri polukruga nad $AB$, $BC$ i $AC$ kao prečnicima. Zajednička tangenta prva dva polukruga u tački $B$ seče treći polukrug u tački $E$. Neka su $U$ i $V$ tačke u kojima zajednička spoljašnja tangenta dodiruje prva dva polukruga. Izraziti veličinu odnosa površina trouglova $EUV$ i $EAC$ u funkciji poluprečnika prva dva polukruga.

**3.** Neka je $p$ prost broj i $n$ prirodan broj. Dokazati da su sledeća dva tvrđenja ekvivalentna:

1° Nijedan od binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ nije deljiv sa $p$.

2° Broj $n$ se može prikazati u obliku $n=p^s q-1$, gde su $s$ i $q$ celi brojevi, $s \geq 0$, $0<q<p$.

*Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** Dve kružnice se dodiruju (iznutra ili spolja) u tački $P$. Prava koja dodiruje jedan od tih krugova u tački $A$, seče drugi u tačkama $B$ i $C$. Dokazati da je prava $PA$ simetrala jednog od uglova između pravih $PB$ i $PC$.

**5.** Deset igrača počeli su igru, svaki sa istom sumom novca. Jedan za drugim, svaki od njih bacao je 5 kockica. Posle svakog bacanja, igrač koji je bacao kockice isplatio je svakom od svojih devet protivnika sumu jednaku $n$-tom delu sume koju je taj protivnik imao do tog trenutka, gde je $n$ zbir brojeva koje su pokazale kockice. Kada je poslednji, deseti, igrač bacio kockice, zbir brojeva na njima iznosio je 12, a pošto je izvršeno isplaćivanje, pokazalo se da svaki igrač ima istu sumu novca kao na početku igre.

Odrediti, ako je mogućno, zbirove koje su pokazale kockice u prethodnih devet bacanja.

**6.** Odrediti sve parove celih brojeva $(x, y)$ koji zadovoljavaju jednačinu

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8\,(x^2+xy+y^2+1).$$

## 3.23. DVADESET DRUGA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1981

Dvadeset druga olimpijada održana je od 7. do 20. jula u SAD u Vašingtonu. Na Olimpijadi je učestvovalo 27 ekipa sledećih zemalja: Australija (Au), Austrija (A), Belgija (Be), Bugarska (B), Brazil (Br), Čehoslovačka (Č), Finska (Fi), Francuska (F), Grčka (G), Holandija (H), Izrael (Iz), Jugoslavija (J), Kanada (Ka), Kolumbija (Ko), Kuba (K), Luksemburg (L), Mađarska (M), Meksiko (Me), Poljska (P), Rumunija (R), SAD, Savezna Republika Nemačka (SRN), Sovjetski Savez (S), Švedska (Š), Tunis (Tu), Velika Britanija (VB), Venecuela (Ve).

Na ovoj Olimpijadi debitovale su ekipe Australije, Kolumbije, Meksika, Tunisa i Venecuele.

Zemlje predlagači i broj poena po zadacima prikazani su u sledećoj tabeli:

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | VB | SRN | H | Be | S | Fi |
| Broj poena | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |

U sledećoj tabeli dat je uspeh pojedinih ekipa, kao i broj učesnika.

| Zemlja | Poena | Učesnika | I nagrada 41—42 poena | II nagrada 34—40 poena | III nagrada 26—33 poena |
|---|---|---|---|---|---|
| Au | 122 | 8 | — | — | 1 |
| A | 290 | 8 | 4 | 2 | 1 |
| Be | 139 | 8 | — | 2 | — |
| B | 287 | 8 | 2 | 3 | 3 |
| Br | 172 | 8 | 1 | — | — |
| Č | 190 | 5 | 1 | 3 | 1 |
| Fi | 206 | 8 | 1 | 1 | 3 |
| F | 209 | 8 | 2 | — | 3 |
| G | 104 | 8 | — | — | — |
| H | 219 | 8 | — | 3 | 1 |
| Iz | 173 | 6 | 1 | — | 3 |
| J | 246 | 8 | 1 | 2 | 3 |
| Ka | 249 | 8 | 2 | 2 | 1 |
| Ko | 93 | 8 | — | — | — |
| K | 141 | 8 | — | 1 | — |
| L | 42 | 1 | 1 | — | — |
| M | 164 | 4 | 3 | 1 | — |
| Me | 12 | 5 | — | — | — |
| P | 259 | 8 | 2 | 3 | 1 |
| R | 136 | 4 | — | 2 | 2 |
| SAD | 314 | 8 | 4 | 3 | 1 |
| SRN | 312 | 8 | 5 | 2 | 1 |
| S | 230 | 6 | 3 | 2 | 1 |
| Š | 207 | 8 | — | 1 | 3 |
| Tu | 32 | 2 | — | — | — |
| VB | 301 | 8 | 3 | 4 | 1 |
| Ve | 64 | 8 | — | — | — |

### *Zadaci sa prvog dana takmičenja*

**1.** Za tačku $P$ unutar datog trougla $ABC$ označimo sa $D$, $E$ i $F$ redom njene ortogonalne projekcije na prave $BC$, $CA$ i $AB$. Odrediti sve tačke $P$ za koje je $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ minimalno.

**2.** Dati su brojevi $n$ i $r$, pri čemu je $1 \leqq r \leqq n$. Posmatrajmo sve podskupove skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koji se sastoje od $r$ elemenata. Izaberimo u svakom od tih podskupova minimalni element. Dokazati da je aritmetička sredina minimalnih elemenata jednaka $\frac{n+1}{r+1}$.

**3.** Odrediti najveću vrednost izraza $m^2+n^2$, gde su $m$ i $n$ prirodni brojevi ($1 \leqq m \leqq 1981$, $1 \leqq n \leqq 1981$), takvi da je $(n^2-mn-m^2)^2=1$.

### *Zadaci sa drugog dana takmičenja*

**4.** 1° Odrediti sve vrednosti $n \geqq 3$ za koje postoji skup od $n$ uzastopnih prirodnih brojeva sa sledećim svojstvom: Najveći od tih brojeva je delilac najmanjeg zajedničkog sadržaoca ostalih $n$—1 brojeva.

2° Za koje vrednosti $n \geqq 3$ postoji tačno jedan skup sa tim svojstvom?

5. Data su tri kruga jednakih poluprečnika sa zajedničkom tačkom $O$ koji leže unutar trougla $ABC$. Svaki od tih krugova dodiruje dve stranice tog trougla. Dokazati da tačka $O$ i centri opisanog i upisanog kruga trougla $ABC$ leže na jednoj pravoj.

6. Poznato je da funkcija $f(x, y)$ za svaki par celih nenegativnih brojeva $x, y$ zadovoljava uslove:

1° $f(0, y)=y+1$; 2° $f(x+1, 0)=f(x, 1)$; 3° $f(x+1, y+1)=f(x, f(x+1, y))$.

Odrediti $f(4, 1981)$.

## 3.24. DVADESET TREĆA MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA, 1982

Ova Olimpijada održana je u glavnom gradu Mađarske od 5. do 14. jula. Na njoj je učestvovalo 30 ekipa sa svih kontinenata. Zbog velikog broja ekipa odlučeno je da svaka ekipa ima najviše po četiri člana. Samo je Alžir imao 3 člana.

Učestvovale su ekipe iz sledećih zemalja: Alžir (Al), Australija (Au), Austrija (A), Belgija (Be), Brazil (Br), Bugarska (B), Velika Britanija (VB), Venecuela (Ve), Vijetnam (V), Grčka (G), Demokratska Republika Nemačka (DRN), Izrael (Iz), Jugoslavija (J), Kanada (Ka), Kolumbija (Ko), Kuba (K), Kuvajt (Ku), Mađarska (M), Mongolija (Mo), Poljska (P), Rumunija (R), Savezna Republika Nemačka (SRN), Sovjetski Savez (S), SAD, Tunis (Tu), Finska (Fi), Francuska (F), Holandija (H), Čehoslovačka (Č), Švedska (Š).

Zemlja predlagač i broj poena za pojedine zadatke dati su u sledećoj tabeli:

| Zadatak | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zemlja predlagač | VB | H | S | VB | H | V |
| Broj poena | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |

U sledećoj tabeli dat je pregled uspeha pojedinih ekipa, mada se na Olimpijadi ne ocenjuju ekipe već pojedinci.

| Zemlja | Broj osvojenih poena | I nagrada 42—37 poena | II nagrada 36—30 poena | III nagrada 29—21 poena |
|---|---|---|---|---|
| Al | 23 | — | — | — |
| Au | 66 | — | — | 1 |
| A | 82 | 1 | — | 1 |
| Be | 50 | — | — | 1 |
| Br | 66 | — | — | 1 |
| B | 108 | — | — | 4 |
| VB | 103 | — | — | 4 |
| Ve | 23 | — | — | — |
| V | 133 | 1 | 2 | 1 |
| G | 55 | — | — | — |
| DRN | 136 | 2 | 1 | 1 |
| Iz | 75 | — | — | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| J | 98 | — | 2 | — |
| Ka | 78 | — | — | 2 |
| Ko | 34 | — | — | — |
| K | 44 | — | — | — |
| Ku | 4 | — | — | — |
| M | 125 | — | 3 | 1 |
| Mo | 56 | — | — | 1 |
| P | 96 | — | 1 | 2 |
| R | 99 | — | 1 | 2 |
| SRN | 145 | 2 | 2 | — |
| S | 137 | 2 | 1 | 1 |
| SAD | 136 | 1 | 2 | 1 |
| Tu | 19 | — | — | — |
| Fi | 113 | — | 2 | 1 |
| F | 89 | 1 | — | — |
| H | 92 | — | 1 | 1 |
| Č | 115 | — | 2 | 2 |
| Š | 74 | — | — | 2 |

Prvi put na ovom takmičenju učestvovala je ekipa Kuvajta.

Rešavanje zadatka održano je u dva dana, 9. i 10. jula. Svakog dana bila su zadana po tri zadatka. Rešavanje je trajalo svakog dana po četiri i po sata.

Evo i zadataka.

***Zadaci sa prvog dana takmičenja***

**1.** Funkcija $f(n)$ definisana je za sve prirodne brojeve $n$ i uzima nenegativne celobrojne vrednosti. Poznato je da:

a) Za svako $m$ i $n$, $f(m+n)-f(m)-f(n)$ uzima jednu od vrednosti 0 ili 1;

b) $f(2)=0$;

c) $f(3)>0$;

d) $f(9999)=3333$.

Odrediti $f(1982)$.

**2.** Dat je nejednakokraki trougao $A_1A_2A_3$ sa stranicama $a_1, a_2, a_3$ ($a_i$ je stranica naspram temena $A_i$). Neka je $M_i$ središte stranice $a_i$, $T_i$ tačka u kojoj upisana kružnica datog trougla dodiruje stranicu $a_i$, i $S_i$ tačka simetrična tački $T_i$ u odnosu na simetralu unutrašnjeg ugla kod $A_i$ ($i=1, 2, 3$).

Dokazati da se prave $M_1S_1$, $M_2S_2$, $M_3S_3$, seku u jednoj tački.

**3.** Posmatrajmo nizove $(x_n)$ pozitivnih realnih brojeva sa svojstvom:

$$1=x_0 \geq x_1 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots$$

a) Dokazati da za svaki niz sa tim svojstvom postoji $n$ takvo da je

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3{,}999.$$

b) Naći niz $(x_n)$ sa navedenim svojstvom, takav da za svako $n$ važi

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4.$$

### *Zadaci sa drugog dana takmičenja*

4. Data je jednačina $x^3-3xy^2+y^3=n$. Ako je $n$ prirodan broj takav da data jednačina ima celobrojno rešenje $(x, y)$, dokazati da ona tada ima bar tri takva rešenja.

Dokazati da za $n=2891$ data jednačina nema nijedno celobrojno rešenje.

5. Na dijagonalama $AC$ i $CE$ pravilnog šestougla $ABCDEF$ izabrane su redom unutrašnje tačke $M$ i $N$, takve da je

$$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=\lambda.$$

Odrediti $\lambda$ ako se zna da tačke $B$, $M$ i $N$ leže na jednoj pravoj.

6. Dat je kvadrat $S$ stranice 100. Neka je $L=A_0A_1A_2\cdots A_n$ poligonalna linija u $S$ koja samu sebe niti seče niti dodiruje i takva da je $A_0\neq A_n$. Neka za svaku tačku $P$ granice kvadrata $S$ postoji tačka linije $L$ na rastojanju od tačke $P$ ne većem od $1/2$.

Dokazati da na liniji $L$ postoje tačke $X$ i $Y$ takve da rastojanje tačaka $X$ i $Y$ nije veće od 1 a dužina dela linije $L$ između tačaka $X$ i $Y$ nije manja od 198.

# 4. PRIJEMNI ISPITI NA ELEKTROTEHNIČKOM FAKULTETU U BEOGRADU

## Septembar 1951.

**1.** Dva mesta $A$ i $B$ nalaze se na udaljenosti $a$ km jedno od drugog. Istovremeno iz oba mesta krenu dva putnika jedan drugom u susret, i pri tome putnik iz $A$ ide $k$ puta brže nego putnik iz $B$. Ako je $v$ brzina putnika $B$, kada će se oni susresti, a kada će biti $b$ km jedan od drugog?

**2.** Dokazati: svaka prava koja prolazi kroz sredinu srednje linije trapeza i seče paralelne stranice, deli trapez na dva dela jednakih površina.

**3.** Ako su $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$ koreni kvadratne jednačine

$$x^2+px+q=0,$$

koji uslov moraju zadovoljiti koeficijenti $p$ i $q$ pa da bude

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}?$$

## Oktobar 1951.

**1.** U $Oxy$ ravni odrediti sve one tačke čije koordinate $x$ i $y$ zadovoljavaju sistem nejednačina

$$y<x+1, \qquad x^2+y^2\leq 1.$$

**2.** Dat je trougao i jedna prava $L$ koja ne seče trougao. Dokazati da je zbir normala spuštenih iz trouglovih temena na pravu $L$ jednak zbiru normala spuštenih na istu pravu iz sredina trouglovih stranica.

**3.** Za koje vrednosti parametra $m$ jednačina

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x=m$$

ima rešenja? Za $m=\sqrt{2}$ naći sva rešenja ove jednačine.

## Septembar 1952.

**1.** $A$ putuje iz mesta $M$ u mesto $N$, a $B$, koji na put kreće istovremeno sa $A$, ide iz $N$ u $M$. U momentu susreta pređeni putevi se odnose kao $m:n$. Putnik $B$ stiže u $M$ $t$ minuta ranije no $A$ u $N$. Da je $A$ imao u sekundi veću brzinu za $a$ metara a $B$ za $b$ metara, putnici bi se sreli posle $T$ minuta. Kojim se

brzinama kreću putnici? Koliko vremena treba svakom od njih da pređe rastojanje između mesta $M$ i $N$? Koliko su udaljena ova dva mesta?

**2.** Kupa je presečena jednom ravni paralelnom sa osnovom i površina dobijenog preseka jednaka je 2/3 površine osnove. Gde je presečena visina? Uzeti proizvoljnu duž za visinu, pa je podeliti tako kako je ona podeljena u ovom slučaju.

**3.** Naći vrednost $\cos 2x$ ako je

$$\sin 3x \sin x = k.$$

Za koje vrednosti $k$ zadatak ima rešenje?

## Septembar 1956.

**1.** Za koje je vrednosti $x$ izraz $\frac{1}{x}$ veći od $\frac{1}{x+1}$?

**2.** Ako je $f(x) = \frac{x}{a^x - 1} + \frac{x}{2}$, ispitati da li su tačni identiteti:

$$f(x) = f(-x) \quad \text{i} \quad 4f(2x)f(x) = 4\,[f(x)]^2 + x^2.$$

Izračunati $f\left(\frac{1}{2}\right)$ za $a = \frac{1}{9}$.

**3.** Ako je zapremina jednog pravilnog oktaedra $V$, kolika je zapremina drugog pravilnog oktaedra čija je ivica $k$ puta veća od ivice prvog oktaedra?

**4.** Odrediti sva rešenja jednačine $\sin px = \cos qx$ po nepoznatoj $x$.

**5.** U prostoru su date četiri tačke koje ne leže u istoj ravni. Navesti kako treba postaviti ravan $(P)$ da bi tri tačke bile sa jedne strane ravni $(P)$, a četvrta s druge strane ove ravni i da ta ravan bude podjednako udaljena od sve četiri date tačke. Koliko ima ravni sa navedenom osobinom?

**6.** Na jednoj težišnoj liniji trougla $ABC$ odabrati tačku $M$ tako da zbir $s = MA^2 + MB^2 + MC^2$ ima minimalnu vrednost. Rešenju dati geometrijsko tumačenje.

## Novembar 1956.

**1.** Ako je $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, oprediti $F(x) = f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ i izračunati $F\left(-\frac{1}{2}\right)$.

**2.** Za koje vrednosti $x$ funkcija $f(x) = x^2 - 2ax + a - 1$ ima minimalnu vrednost i kolika je ta minimalna vrednost? Ispitati znak minimalne vrednosti i dati rezultatu geometrijsko značenje.

**3.** Izračunati na jednu tačnu decimalu izraze: $\sqrt{0{,}1}$, $\sqrt[3]{0{,}1}$, $\sqrt[4]{0{,}1}$.

**4.** Da li je broj $1+\sqrt{-1}$ rešenje jednačine $x^3-x+1=0$?

**5.** Svetla tačka $S$ udaljena je za $d$ od centra jedne lopte poluprečnika $r(<d)$. Kolika je veličina dela površine lopte koju osvetljava tačka $S$? Koji je to deo od celokupne površine loptu? Koja je površina skup svih zrakova iz tačke $S$ koji dodiruju datu lopte?

**6.** Za koje vrednosti $a$ jednačina $\sin px \cos px = a$ ($a$ je data konstanta) ima rešenja? Za $a=1/4$ odrediti sva rešenja ove jednačine.

## Septembar 1962.

**1.** Proizvod $0{,}2 \cdot 0{,}008$ napisati u obliku $a \cdot 10^{-5}$, gde je $a$ konstanta koju treba odrediti.

**2.** Izračunati na dve tačne decimale vrednost izraza $x=\sqrt{\frac{a+b}{2}+c^2}$ za $a=\frac{1}{2}$; $b=0{,}1$; $c=0{,}9$.

**3.** Ako su $a$ i $b$ prirodni brojevi, dokazati da je $ab(a+b)$ paran broj.

**4.** 1° Da li je 0,3 koren jednačine $x^3-0{,}1x^2-0{,}02=0$?

2° Ako su $p$ i $q$ pozitivni brojevi, da li jednačina $x^2+px+q=0$ može imati pozitivnih korena?

**5.** Odrediti sve vrednosti $x$ za koje je $\frac{1}{1-x}>2$.

**6.** Odrediti sva rešenja jednačine $2\sin^2 x+\sin x=0$.

**7.** Jednačine dva kruga glase

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2, \quad (x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2.$$

Koji uslov treba da ispunjavaju $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$, $r_1$, $r_2$ da bi ova dva kruga imala dve zajedničke tačke?

**8.** Dat je pravougli trougao čije su katete $a$ i $b$. Prav ugao tog trougla podeljen je polupravama $q$ i $p$ na tri jednaka dela.

Izračunati dužine onih delova polupravih $p$ i $q$ koji se nalaze u datom trouglu.

## Septembar 1963.

**1.** Neka je $E$ sredina stranice $AB$ kvadrata $ABCD$. Odrediti u kojoj razmeri duž $DE$ deli dijagonalu $AC$.

**2.** Odrediti vrednost izraza $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$ za $a=(2+\sqrt{3})^{-1}$ i $b=(2-\sqrt{3})^{-1}$.

3. Neka je $\log a = \frac{2}{3}$, $\log b = \frac{1}{3}$. Bez upotrebe logaritamskih tablica utvrditi da li je broj $\log(a+b)$ veći ili manji od 1.

4. Proizvod $0{,}04 \cdot 0{,}006$ napisati u obliku $a \cdot 10^{-6}$, gde je $a$ konstanta koju treba odrediti.

5. Odrediti sva rešenja jednačine $\sin x = \sin 2x$.

6. Ako je $f(x+a) = x^2 - x + 2$, odrediti $f(x-a)$.

7. Oko date lopte opisana je prava zarubljena kupa. Dokazati da je površina lopte manja od omotača kupe.

**Septembar 1964.**

1. Izračunati: 1° $\frac{0{,}1 : 0{,}02^2}{0{,}1 \cdot 0{,}02}$; 2° $1\frac{1}{6} - \frac{1}{3} : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$.

2. Koliko je tri četvrtine od pet šestina?

3. Bez upotrebe logaritamskih tablica ispitati šta je veće $\log_2 3$ ili $\log_3 4$.

4. Odrediti dva uzastopna prirodna broja koji su dati izrazima

$$2(n-3)(n+1) \quad \text{i} \quad (n-2)(2n-1).$$

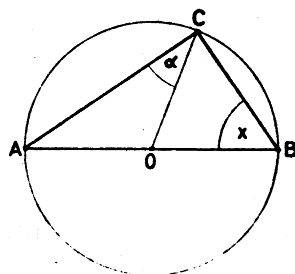
5. Dokazati da tri različita broja ne mogu istovremeno biti tri uzastopna člana jedne aritmetičke i jedne geometrijske progresije.

6. Rešiti nejednačinu $\frac{x-1}{x-2} < \frac{x-3}{x-5}$.

7. Izračunati vrednost $(x + \sqrt{x^2-1}) : (x - \sqrt{x^2-1})$ za $x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, gde je $a$ realno i različito od nule.

8. 1° Konstruisati trougao $ABC$ ako su dati njegovi elementi: $\sphericalangle A = 75^0$, $\sphericalangle B = 45^0$, $AB = 4$ cm.

2° Na stranici $BC$ ovog trougla konstruisati tačku $P$ tako da je $AP + PC = BC$ i odrediti uglove trougla $ABP$.




9. Uglovi jednog četvorougla redom su u stepenima: $x$, $x+20$, $x+30$, $x+50$. Odrediti $x$ i dokazati da je taj četvorougao trapez.

10. Izraziti $x$ pomoću $\alpha$ (na slici $O$ je centar kruga, $AB$ prečnik kruga i $C$ tačka na krugu).

11. Izračunati visinu trapeza čije su paralelne stranice 15 i 11, a neparalelne 5 i 7.

**12.** Ako je $\sin\alpha = \frac{2}{7}$ i $\cos\beta = \frac{41}{49}$ ($\alpha$ i $\beta$ su oštri uglovi), bez upotrebe tablica izračunati $\cos(2\alpha - \beta)$.

## Septembar 1966.

### Prvi deo

**1.** Izračunati sa tri tačna decimala vrednost izraza

$$E = \frac{10(a-b)\sqrt{a}}{a+b}$$

za sledeće vrednosti $a$ i $b$: 1° $a = 0{,}01$, $b = 0{,}001$; 2° $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{8}$.

**2.** U jednoj prodavnici artiklu od 12 250 dinara snižena je cena za 40%. U drugoj prodavnici istom artiklu prvo je snižena cena za 36%, a zatim od nove cene za 4%.

Za koliko se razlikuju cene artikla u ovim prodavnicama?

**3.** Po $a, b, c, d$ rešiti sistem jednačina

$$abc = 0, \qquad bcd = 0.$$

**4.** Rešiti sistem nejednačina

$$abc < 0, \qquad bcd > 0.$$

**5.** Koliko se najviše krugova, prečnika $2r = b$, može upisati u pravougaoniku sa stranicama $a$ i $b$?

**6.** Data su dva podudarna pravilna tetraedra, $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$.

Ako se poklope temena $A$ i $A_1$, $B$ i $B_1$, $C$ i $C_1$, dobija se jedan poliedar. Da li je ovaj poliedar pravilan? Obrazložiti odgovor.

**7.** Proveriti da li je

$$\sin(x+y)\sin(x-y) = (\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y)$$

identitet.

**8.** Dokazati da je zbir kubova tri uzastopna prirodna broja deljiv sa 9.

### Drugi deo

**9.** Dokazati formulu $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} . k^3 = -n^2(4n+3)$.

**10.** Dat je skup parabola $y = ax^2 - 2x + 1$ ($a$ je realan broj).

1° Odrediti geometrijsko mesto temena datih parabola kada se $a$ menja.

2° Odrediti fiksnu tačku kroz koju prolaze sve date parabole.

3° Grafički predstaviti parabole iz datog skupa za razne vrednosti $a$.

**11.** U kružnom isečku sa centralnim uglom $2\alpha$ i poluprečnikom $r$ upisan je pravougaonik čije su dve stranice paralelne osi simetrije isečka. Odrediti pravougaonik najveće površine.

**12.** Odrediti realne brojeve $a$ i $b$ tako da za $\frac{5}{4}\pi \leqq x \leqq \frac{7}{4}\pi$ važi identitet

$$\cos x \equiv a\sqrt{1-\sin 2x} + b\sqrt{1+\sin 2x}.$$

**13.** Neka je $\alpha$ unutrašnji ugao jednog pravilnog poligona i $\beta$ unutrašnji ugao drugog pravilnog poligona.

Koji poligoni imaju osobinu da je $\alpha : \beta = 3:2$?

## Septembar 1967.

### Prvi deo

**1.** Izračunati sledeće izraze:

(a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}:\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; (b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$;

(c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$; (d) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$.

**2.** Ako je $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, gde su $a>0$ i $b>0$, odrediti izraz

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

u što prostijem obliku.

**3.** Odrediti oblasti u $xy$-ravni za koje važi nejednakost

$$(x-y-3)(x+y+5)>0.$$

**4.** Jednakostranični trougao, kvadrat i pravilan šestougao imaju jednake površine. Koja od ovih figura ima najmanji obim?

**5.** Osnovice jednog trapeza su $a$ i $b$. Naći dužinu odsečka prave koja je paralelna osnovicama trapeza i koja polovi površinu trapeza.

**6.** Lopta je presečena sa dve paralelne ravni koje su međusobno udaljene za 3 cm i nalaze se sa jedne strane centra. Ove ravni seku loptu po krugovima čiji su poluprečnici 9 cm i 12 cm. Izračunati zapreminu lopte.

**7.** Rešiti jednačinu $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}$.

### Drugi deo

**8.** Ako je $n$ prirodan broj, dokazati da je izraz $n^3+11n$ deljiv sa 6.

**9.** 1° Ako su $-1<x<2$ i $2<y<5$, u kojim se granicama nalazi izraz $x-y$?

2° Ako su $a<x<b$ i $c<y<d$, u kojim se granicama nalazi izraz $rx+sy$, gde su $r$ i $s$ realni brojevi?

**10.** Dokazati da izraz

$$T \equiv 3+4\cos t+\cos 2t$$

ne dobija negativnu vrednost ni za jednu realnu vrednost od $t$. Za koje se vrednosti od $t$ anulira izraz $T$?

**11.** Odrediti konstantu $a$ tako da funkcija

$$f(x)=\frac{5x-1}{x^2+x}-a\frac{5x+1}{x^2-x}$$

ne bude ni parna ni neparna.

## Septembar 1968.

**1.** Izračunati 0,3% od $A$, ako je

$$A=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):0{,}4.$$

**2.** Ako je $x-x^{-1}=a$, izračunati $x^3+x^{-3}$.

**3.** Ako brojevi $a^2$, $b^2$, $c^2$ obrazuju aritmetičku progresiju, ispitati da li brojevi $1/(b+c)$, $1/(c+a)$, $1/(a+b)$ takođe obrazuju aritmetičku progresiju.

**4.** Dokazati jednakost

$$\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log(1+n). \tag{1}$$

**5.** Za koje se vrednosti realnog parametra $m$ samo jedan koren jednačine $x^2-2(m+1)x+m^2=0$ nalazi između 0 i 2?

**6.** Rešiti nejednačinu $|x|<|x-1|$.

**7.** U pravougaoniku $ABCD$ tačke $P$, $Q$, $R$, $S$ su sredine stranica $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Prave $AQ$, $BR$, $CS$, $DP$ seku se i obrazuju četvorougao.

a) Dokazati da je ovaj četvorougao paralelogram.

b) Odrediti njegovu površinu kada je poznata površina pravougaonika $p$.

**8.** Odrediti sva rešenja jednačine $\sin 3x=\cos 2x$.

**9.** U pravoj četvorostranoj piramidi data je osnovna ivica $a$ i ugao $\alpha\,(>\pi/4)$ koji bočna strana te piramide zaklapa sa osnovom. Kroz osnovnu ivicu povučena je ravan koja stoji normalno na bočnoj strani. Izračunati površinu preseka te ravni i date piramide.

**10.** Odrediti koordinate sredine one tetive parabole $y^2=4x$ koja prolazi kroz njenu žižu, a normalna je na pravoj $y=2x$.

## Septembar 1969.

**1.** Izračunati

$$\frac{\sqrt[3]{-0{,}008}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right)}{5\frac{1}{3}:0{,}2}\cdot\log_{10}1\,000,$$

kao i 0,8% od dobijenog rezultata.

**2.** Odrediti $a$ tako da jednačine

$$x^2+x+a=0 \quad \text{i} \quad x^2+ax+1=0$$

imaju zajednički koren.

**3.** Ako je $a_1>0$, $a_2>0, \ldots, a_n>0$ i ako $a_1, a_2, \ldots, a_n$ obrazuju aritmetičku progresiju, dokazati identitet

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

**4.** Dat je obim $s$ kružnog sektora (kružnog isečka). Na kome će krugu sektor imati najveću površinu?

**5.** Odrediti i šrafirati oblasti u $xy$-ravni u kojima treba da se nalazi tačka $(x, y)$ da bi važila nejednakost $\sin(x+y)>0$.

**6.** Prav valjak i kupa imaju zajedničku osnovu a vrh kupe nalazi se u središtu druge osnove valjka. Odrediti ugao $\alpha$ koji zaklapaju izvodnica kupe i osa valjka ako je razmera površina valjka i kupe $4(\sqrt{2}-1):1$.

## Septembar 1970.

**1.** Prava $p_2$ seče pravu $p_1$ dok je prava $p_3$ paralelna sa $p_1$. Ove prave su različite i leže u jednoj ravni. Odrediti broj tačaka u ravni koje su podjednako udaljene od pravih $p_1, p_2, p_3$.

**2.** Odrediti realne vrednosti $x$ koje zadovoljavaju jednakost

$$(\log_a x)(\log_b x)=\log_a b,$$

gde su $a$ i $b$ pozitivne konstante različite od 1.

**3.** Osnova piramide je paralelogram čije su stranice 3 cm i 7 cm, a manja dijagonala 6 cm. Visina piramide prolazi kroz presek dijagonala i iznosi 4 cm. Naći bočne ivice piramide i uglove bočnih strana prema osnovi.

**4.** 1° Izraziti $\operatorname{tg} 3x$ pomoću $\operatorname{tg} x$.

2° Izraziti $S=\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$ pomoću $\operatorname{tg} 3x$.

**5.** Naći jednačinu prave koja pripada pramenima

$$5x+3y-2+k_1(3x-y-4)=0, \quad x-y+1+k_2(2x-y-2)=0$$

i odrediti njen položaj prema krugu $x^2+y^2-3x+2y-3=0$.

**6.** Ako su $a$ i $b$ realni brojevi, dokazati da je

$$|\sin(a+b)| \leqq |\sin a|+|\sin b|$$

i da za svaki prirodan broj $k$ važi

$$|\sin kx| \leqq k|\sin x|.$$

## Septembar 1971.

**1.** Izračunati vrednost izraza

$$A=6:\frac{1}{3}-0{,}8:\frac{1{,}5}{\frac{3}{2}\cdot 0{,}4\cdot\frac{50}{1:\frac{1}{2}}}-\frac{\left(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}}{0{,}025}$$

i naći 5% od dobijenog rezultata.

*Primedba.* $140\frac{7}{30}$, $138\frac{5}{12}$, $18\frac{1}{6}$ su mešoviti brojevi.

**2.** U lopti poluprečnika $R$ upisana je pravilna četvorostrana piramida čije su sve ivice jednake. Odrediti površinu i zapreminu te piramide.

**3.** Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ članovi aritmetičke progresije, dokazati da je

$$(1) \qquad \frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

**4.** Ako uglovi $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ trougla zadovoljavaju jednakost

$$\sin\alpha=\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma},$$

odrediti ugao $\alpha$.

**5.** Podeliti $x^3+3x-4$ sa $x-1$ i na osnovu toga rešiti jednačinu $x^3+3x-4=0$. Dokazati zatim da izraz $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ takođe zadovoljava datu jednačinu i na osnovu toga naći kolika je vrednost ovog izraza.

## Septembar 1972.

**1.** Oko trougla $ABC$ opisan je krug i u temenu $A$ povučena je tangenta kruga. Prava paralelna sa ovom tangentom seče prave $AB$ i $AC$ u tačkama $D$ i $E$. Dokazati da tačke $B$, $C$, $D$ i $E$ leže na jednom krugu.

**2.** Rešiti sistem jednačina

$$x+y=\frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1.$$

**3.** Na horizontalan ravan sto postavljene su četiri lopte jednakih poluprečnika tako da svaka dodiruje dve susedne a tačke dodira sa stolom obrazuju kvadrat strane $2r$, pri čemu je $r$ poluprečnik lopti. Odozgo na ove četiri lopte postavljena je peta lopta, takođe poluprečnika $r$, koja dodiruje četiri prethodne.

1° Naći odstojanje centra pete lopte od površine stola.

2° Naći zatim zapreminu nove lopte koja prolazi kroz centre pomenutih pet lopti kao i površinu onog njenog dela koji se nalazi ispod ravni stola.

**4.** U jednoj fabrici povećana je proizvodnja u 1970. godini u odnosu na 1969. za 4%, u 1971. u odnosu na 1970. za 5%. Za koliko procenata treba da se poveća proizvodnja u 1972. u odnosu na 1971. da bi prosečno godišnje povećanje za 1970, 1971. i 1972. u odnosu na 1969. iznosilo 5%?

**5.** 1° Odrediti sve realne brojeve $x$ za koje je $\frac{1}{x}>\frac{1}{a}$, pri čemu je $a$ realan broj $(a\neq 0)$.

2° Odrediti sve realne četvorke brojeva $\{x, y, z, u\}$ za koje važe relacije

$$xyz \geqq 0, \quad zu=0.$$

**6.** Pomoću tri cifre, od kojih ni jedna nije nula, obrazovani su svi trocifreni brojevi sa različitim ciframa. Zbir dva najveća od tih je 1444. Naći te tri cifre.

## Septembar 1973.

**1.** Neka su $a$, $b$ i $c$ realni brojevi. Odrediti sve realne brojeve $a$, $b$ i $c$ takve da je ispunjen sistem nejednakosti:

$$b^2+c^2>0, \quad \frac{a}{b}>0, \quad \frac{b}{c}>0.$$

**2.** Neka su $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, realni brojevi. Dokazati:

1° Ako je $a_1 \geqq a_2$, $b_1 \geqq b_2$, tada je

$$\frac{a_1+a_2}{2}\,\frac{b_1+b_2}{2} \leqq \frac{a_1b_1+a_2b_2}{2}.$$

2° Ako je $a_1 \leqq a_2$ i $b_1 \geqq b_2$, tada je

$$\frac{a_1+a_2}{2}\,\frac{b_1+b_2}{2} \geqq \frac{a_1b_1+a_2b_2}{2}.$$

**3.** Na neprovidnoj ploči nalazi se neprovidna lopta poluprečnika $R$. Iznad te lopte na zamišljenoj pravoj, koja prolazi kroz loptino središte i stoji normalno na ploči, nalazi se svetlosni izvor u obliku tačke, udaljen od ploče $a(a>2)$ loptinih poluprečnika.

1° Izračunati osvetljenu površinu lopte i površinu senke na ploči.

2° Šta biva sa ove dve površine kada $a$ raste?

**4.** Od kockica ivice 1 cm složen je pravougli paralelepiped, čije su ivice $a$ cm, $b$ cm i $c$ cm ($a$, $b$ i $c$ prirodni brojevi veći od 1). Ovaj paralelepiped obojen je spolja crveno.

Koliko kockica od kojih je sagrađen paralelepiped imaju:

1° samo tri strane obojene crveno;
2° samo dve strane obojene crveno;
3° samo jednu stranu obojene crveno;
4° nijednu stranu obojenu crveno;
5° bar jednu stranu obojene crveno?

**5.** Ako za uglove $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ trougla $ABC$ važi jednakost

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)+\sin\gamma},$$

dokazati da je trougao $ABC$ pravougli.

## Septembar 1974.

**1.** Dokazati da je zbir kvadrata bilo kojih pet uzastopnih prirodnih brojeva deljiv sa 5 ali da nije deljiv sa 25.

**2.** Odrediti vrednosti parametra $a$ za koje je sistem nejednakosti

$$-3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$$

zadovoljen za sve vrednosti promenljive $x$.

**3.** U jednakostraničnom trouglu stranice $a$ povučena je kroz težište prava $l$ paralelna osnovici. Odrediti razmeru veličina površina na koje je trougao podeljen. Svaka od tih površina posebno vrši rotaciju oko prave $l$. Dokazati da tela koja nastaju tom rotacijom imaju jednake površine i jednake zapremine.

**4.** Dokazati da je

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

jednačina kruga čiji jedan dijametar ima za krajnje tačke $(x_1, y_1)$ i $(x_2, y_2)$.

**5.** Rešiti trigonometrijsku jednačinu

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x.$$

## Septembar 1975.

**1.** Šta o brojevima $a$, $b$, $c$ iskazuju nejednakosti:

1° $|b-c|+|c-a|+|a-b|>0$; 2° $(b-c)(c-a)(a-b)\neq 0$?

2. Dokazati da je

$$\left(\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\right)^3+\left(\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}\right)^3=4\cos 6\theta+24\cos 2\theta.$$

Za koje vrednosti $\theta$ ovaj indentitet ne važi?
Rešiti jednačinu $\cos 6\theta+6\cos 2\theta=0$.

3. Data je funkcija $f(x)=x^2-3x+2$.

1° Dokazati da razlike

$$f(x+1)-f(x),\quad f(x+2)-f(x+1),\quad f(x+3)-f(x+2),\ldots$$

obrazuju aritmetičku progresiju.

2° Koju vrednost treba dati promenljivoj $x$ da bi zbir pet prvih članova te progresije bio 60?

3° Koliko članova najmanje treba sabrati za nađeno $x$ da bi zbir bio veći od 120?

4. Dat je kvadrat $ABCD$ stranice $a$, sa centrom u tački $O$. Kroz naspramna temena $A$ i $C$ kvadrata povučene su poluprave $AX$ i $CY$ koje stoje normalno na ravni kvadrata i to sa iste strane ravni. Na $AX$ uzeta je tačka $M$ tako da je $OM=a$, a na $CY$ tačka $N$ tako da je $MN=2a$.

1° Dokazati da je $MN$ normalno na ravni $DMB$;
2° Izračunati zapremine tetraedara $MABD$, $NCBD$ i $NMBD$.

5. Ako tri realna broja $x$, $y$, $z$ ispunjavaju uslove

$$x+y+z=5,\qquad yz+zx+xy=8,$$

dokazati da svaki od njih leži u intervalu $(1, 7/3)$.

## Septembar 1976.

1. Rešiti sistem jednačina

$$a^2+bc=0,\qquad ab+bd=0,\qquad ac+cd=0,\qquad bc+d^2=0.$$

2. U prodavnici je bilo 6 sanduka sa jabukama sa težinama od 15 kp, 16 kp, 18 kp, 19 kp, 20 kp i 31 kp. Dva kupca su kupila 5 sanduka, tako da je jedan uzeo dva puta više jabuka nego drugi. Koji je sanduk ostao neprodat?

3. Odrediti prirodan broj $n$ ako se zna da je zbir $1+2+3+\cdots+n$ trocifren broj čije su sve cifre jednake.

4. Kroz teme $A$ trougla $ABC$ postavljena je prava $p$ paralelna sa $BC$ i na njoj je uzeta proizvoljna tačka $D$. Na $CD$ spuštena je normala $BE$. Dokazati da je površina trougla $ABC$ jednaka $\frac{1}{2}CD\cdot BE$.

5. Odrediti realne brojeve $a$ i $b$ tako da za $\frac{3}{4}\pi\leq x\leq\frac{5}{4}\pi$ važi identitet

$$\sin x\equiv a\sqrt{1+\sin 2x}+b\sqrt{1-\sin 2x}.$$

## Septembar 1977.

**1.** Odrediti dva trocifrena broj čiji se proizvod sastoji samo od trojki. Da li je rešenje jedinstveno?

**2.** Proveriti identitet $\frac{\cos 3t}{\cos t}-\frac{\cos 6t}{\cos 2t}=2(\cos 2t-\cos 4t)$.

Da li ovaj identitet važi za svako $t$?

Rešiti jednačinu $\frac{\cos 3t}{\cos t}=\frac{\cos 6t}{\cos 2t}$.

**3.** Rešiti nejednačinu $\log_5 x \geqq \log_{25}(3x-2)$.

**4.** U urni se nalazi 100 raznobojnih kuglica: 28 crvenih, 20 zelenih, 12 žutih, 20 plavih, 10 belih i 10 crnih. Koliko najmanje kuglica treba izvući iz urne da bi među njima sigurno bilo 15 kuglica iste boje?

**5.** Za trougao $ABC$ data su 4 tvrđenja: 1° trougao $ABC$ je pravougli, 2° ugao $BAC=30°$, 3° $AB=2BC$, 4° $AC=2BC$. Zna se da su dva tvrđenja tačna a dva netačna. Odrediti obim trougla $ABC$ ako je $BC=1$.

## Septembar 1978.

**1.** Ako su $x_1$ i $x_2$ koreni jednačine $x^2+px+q=0$, odrediti $p$ i $q$ tako da $x_1+1$ i $x_2+1$ budu koreni jednačine $x^2-p^2x+pq=0$.

**2.** Broju 517 treba dopisati s desne strane dve cifre tako da se dobije petocifren broj koji je deljiv sa 6, sa 7 i sa 9. Kako glasi taj petocifreni broj?

**3.** Ako su $a$ i $b$ paralelne stranice, $c$ i $d$ kraci a $p$ i $q$ dijagonale trapeza, dokazati da je $p^2+q^2=c^2+d^2+2ab$.

**4.** Dužine stranica nekog trougla su

$$a=p^2+p+1, \qquad b=p^2+2p, \qquad c=2p+1,$$

gde je $p$ pozitivan broj.

Izračunati srednji po veličini ugao tog trougla.

**5.** Četiri učenika: Aca, Bora, Vasa i Goran takmičili su se u trčanju. Posle trke, na pitanje koje je ko mesto zauzeo, odgovorili su:

Aca: Ja nisam bio ni prvi ni poslednji.
Bora: Ja nisam bio poslednji.
Vasa: Ja sam bio prvi.
Goran: Ja sam bio poslednji.

Tri od ovih odgovora bili su istiniti a jedan neistinit. Ko je govorio neistinu? Kakav je bio poredak na cilju?

## Septembar 1979.

1. Uprostiti izraz

$$E=\frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)} \qquad (a\neq b\neq c\neq a).$$

2. Odrediti brojeve $A$, $B$, $C$ tako da za svaki prirodan broj $n$ važi jednakost

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=\frac{An+B}{2^n}+C.$$

3. Odrediti sve petocifrene brojeve oblika $34x5y$ koji su deljivi sa 36.

4. Rešiti po $x$ jednačinu $\sin x+2\sin x\cos(a-x)=\sin a$.

5. Dat je paralelogram $ABCD$. Dijagonala $AC$ i duž $BE$, gde je $E$ sredina stranice $DC$, dele ovaj paralelogram na četiri dela. Ako je površina paralelograma jednaka $S$, izračunati površinu svakog od ovih delova.

## Jun 1982.

1. Ako je $a$ realan broj različit od nule, dokazati da

$$A=a^{-1}(1+a^{-2})^{-0,5}(1+a^2)^{0,5}$$

može imati samo dve vrednosti i odrediti te vrednosti.

2. Danas, 24. juna 1982. godine Ivan ima onoliko godina koliki je zbir cifara u njegovoj godini rođenja. Koliko godina ima Ivan?

3. Dokazati identitet

$$\frac{1+\cos(2x+630^\circ)+\sin(2x+810^\circ)}{1-\cos(2x-630^\circ)+\sin(2x+630^\circ)}=\operatorname{cotg} x.$$

4. Dat je paralelogram $ABCD$. Na pravama $AC$ i $BC$ izabrane su redom tačke $H$ i $K$ tako da su trouglovi $KAB$ i $HCB$ jednakokraki ($KA=AB$, $HC=CB$). Dokazati da je trougao $KDH$ takođe jednakokraki.

5. Rešiti nejednačinu $\log_{1/2}(x^2-4x+3)\geq -3$.

# LITERATURA

## 1. *Časopisi*


[1] Математика в школе, Москва.
[2] The American Mathematical Monthly, New York.
[3] Математика, Софија.
[4] Matematyka, Warszawa.
[5] Középiskolai Matematikai Lapok, Budapest.
[6] Matematika ve škole, Praha.
[7] Rozhledy matematičko-fyzikàlní, Praha.
[8] Matematičko-fizički list za učenike srednjih škola, Zagreb.
[9] Gazeta matematica, serija B, Bucuresti.


## 2. *Knjige i članci*


[10] S. Straszewicz: *Zadania z olimpiad matematycznych*, t. 1. Warszawa 1960.
[11] C. T. Salkind: *The contest problem book*. Yale University, USA, 1961.
[12] B. V. Gnedenko: *Mathematical education in USSR*. The American Mathematical Monthly 64 (1957), 389—408.
[13] R. Creighton Buck: *A look at mathematical competitions*. Ibidem 66 (1959), 201—212.
[14] J. Aczél: *A look mathematical competitions in Hungary*. Ibidem 67 (1960), 435—437.
[15] J. de Francis: *Mathematical competitions in China*. Ibidem 67 (1960), 756—762.
[16] I. Wirszup: *The Seventh mathematical olympiad for secodary school students in Poland*. The Mathematics Teacher 51 (1958), 585—589.
[17] O. Sacter: *Olimpiade matematice*. Bucuresti 1959.
[18] А. Н. Колмогоров: *О профессии математика*, III izdanje. Moskva.
[19] D. S. Mitrinović: *Matematičke grupe za učenike srednjih škola*. Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od SR Makedonija 2 (1961), 56—64.
[20] M. Sevdić (redaktor): *Matematička čitanka*. Zagreb 1947, 323 str.
[21] M. Petrović: *Članci*. Beograd 1949, 112 str.
[22] A. Hinčin: *Osnovni pojmovi matematike i matematičke definicije u srednjoj školi*. Beograd 1948, 54 str.
[23] K. Alendorfer i K. Okli: *Principi matematike*, drugo izdanje. Beograd 1966.
[24] D. S. Mitrinović: *Zbornik matematičkih problema*, knjiga 1, treće izdanje. Beograd 1962